

Temat: Układy dwóch równań liniowych z interpretacją geometryczną

$$\begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1, & a_1 \neq 0 \text{ lub } b_1 \neq 0 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2, & a_2 \neq 0 \text{ lub } b_2 \neq 0 \end{cases}$$

Interpretacja geometryczna układów równań liniowych

Zwzględniając liczbę rozwiązań układu równań liniowych wyróżniamy:

- układ oznaczony,
- układ nieoznaczony,
- układ sprzeczny.

Metody rozwiązywania układów równań liniowych:

- metoda podstawiania
- metoda przeciwnych współczynników

Zadanie 1 Sprawdź, czy układ równań jest oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny.

a)
$$\begin{cases} 2x + 4y = 24 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$$

Metoda podstawiania:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 24 \\ x = 12 - 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot (12 - 2y) + 4y = 24 \\ x = 12 - 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 24 - 4y + 4y = 24 \\ x = 12 - 2y \\ 24 = 24 \\ x = 12 - 2y \end{cases}$$

Układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań

postać: $\begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ x = 12 - 2y \end{cases}$

jest to układ nieoznaczony.

b)
$$\begin{cases} x + 3y = 3 & \textcircled{1} \\ x - 3y = -3 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 2x = 0 \quad | :2 \\ x = 0 \end{array}$$

Podstawiamy $x=0$ do $\textcircled{1}$:

$$\begin{aligned} 0 + 3y &= 3 \\ 3y &= 3 \quad | :3 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Układ równań ma jedno rozwiązanie i jest tym rozwiązaniem para lib : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

jest to układ oznaczony.

c)
$$\begin{cases} x + 3y = 7 \quad | \cdot (-2) \\ 2x + 6y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x - 6y = -14 \\ 2x + 6y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 0 = -10 \end{array}$$

Układ równań nie ma rozwiązań. Jest to układ sprzeczny.

Zadanie Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań:

a)
$$\begin{cases} 4x + y = 5 & \textcircled{1} \\ 2x - y = -2 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 6x = 3 \quad | :3 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{array}$$

Podstawiamy $x = \frac{1}{2}$ do równania $\textcircled{1}$

$$\begin{aligned} 4 \cdot \frac{1}{2} + y &= 5 \\ 2 + y &= 5 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 3 \end{cases}$$

(jest to rozwiązanie algebraiczne)

Jeżeli rozwiążemy graficznie ten układ równań:

$$\begin{cases} 4x + y = 5 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$$

Ad. $\textcircled{1}$ Miejsce zerowe funkcji:

$$y = -4x + 5 \text{ wyznaczymy:}$$

$$\begin{aligned} -4x + 5 &= 0 \\ -4x &= -5 \quad | :(-4) \\ x &= \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y = -4x + 5 & \textcircled{1} \\ y = 2x + 2 & \textcircled{2} \end{cases}$$

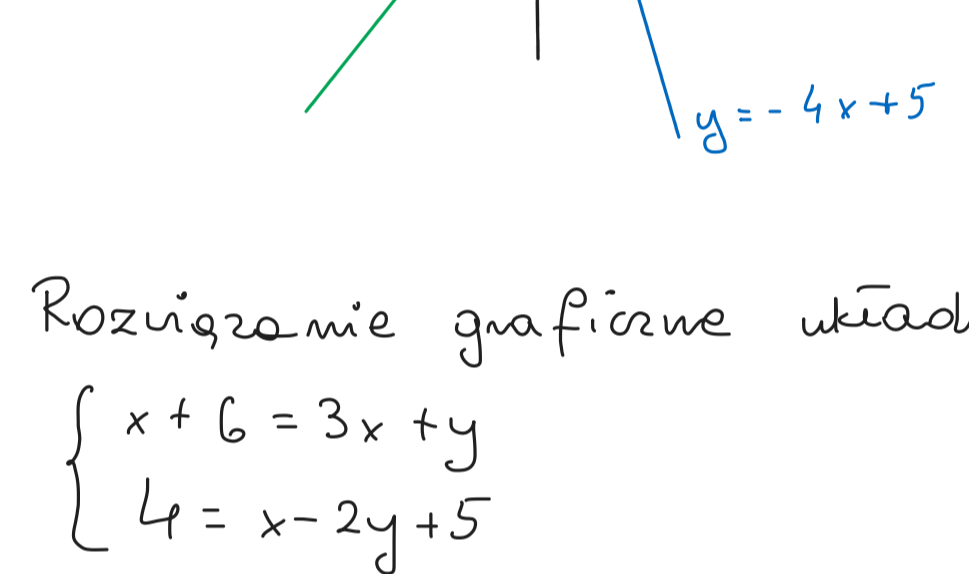
Ad. $\textcircled{2}$ Miejsce zerowe

funkcji: $y = 2x + 2$ linijny:

$$\begin{aligned} 2x + 2 &= 0 \\ 2x &= -2 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & -1 \\ \hline y & 2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1\frac{1}{4} \\ \hline y & 5 & 0 \end{array}$$



b)
$$\begin{cases} x + 6 = 3x + y \\ 4 = x - 2y + 5 \end{cases}$$

Rozwiązanie graficzne układu

$$\begin{cases} x + 6 - 3x - y = 0 \\ 4 - x - 2y + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x - y = -6 \\ 2y = x + 5 - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x - y = -6 \\ -2x + 6 = y \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 6 \\ 2y = x + 1 \quad | :2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 6 \\ x + 4x - 12 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 6 & \textcircled{1} \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 6 \\ 5x = 11 \quad | :5 \end{cases}$$

Ad. $\textcircled{1}$ $y = -2x + 6$

Miejsce zerowe: $-2x + 6 = 0$

$$\begin{aligned} -2x &= -6 \quad | :(-2) \\ x &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 6 \\ x = \frac{11}{5} = 2\frac{1}{5} \end{cases}$$

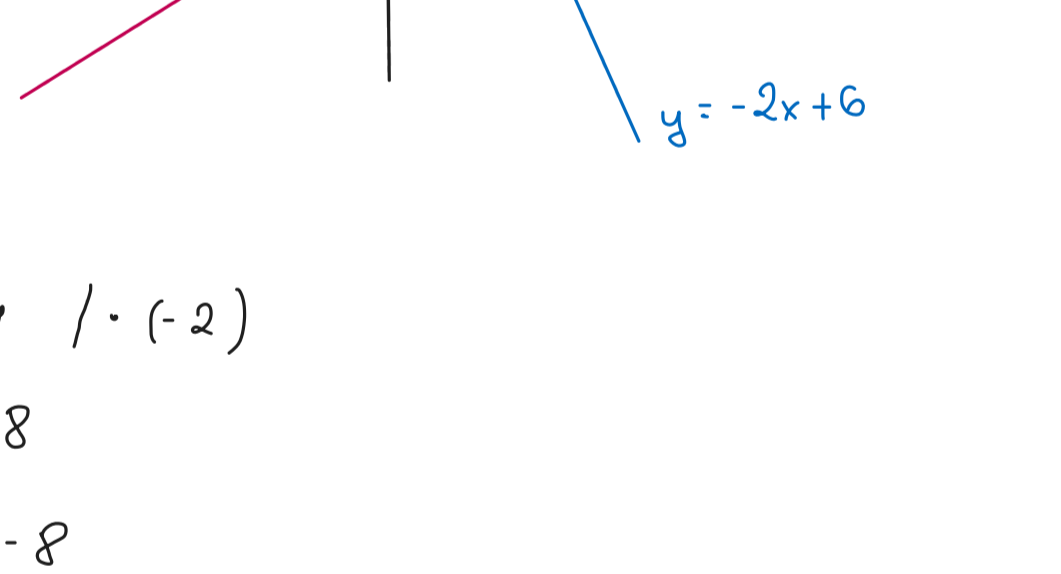
Ad. $\textcircled{2}$ $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Miejsce zerowe: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x &= -\frac{1}{2} \quad | \cdot 2 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y = -2 \cdot \frac{11}{5} + 6 \\ x = 2\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & -1 \\ \hline y & \frac{1}{2} & 0 \end{array}$$



$$\begin{cases} x = \frac{11}{5} \\ y = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2\frac{1}{5} \\ y = 1\frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2\frac{1}{5} \\ y = 1\frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2\frac{1}{5} \\ y = 1\frac{3}{5} \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x - y = 4 \quad | \cdot (-2) \\ 2x - 2y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + 2y = -8 \\ 2x - 2y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 0 = 0 \end{array}$$

Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań: $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

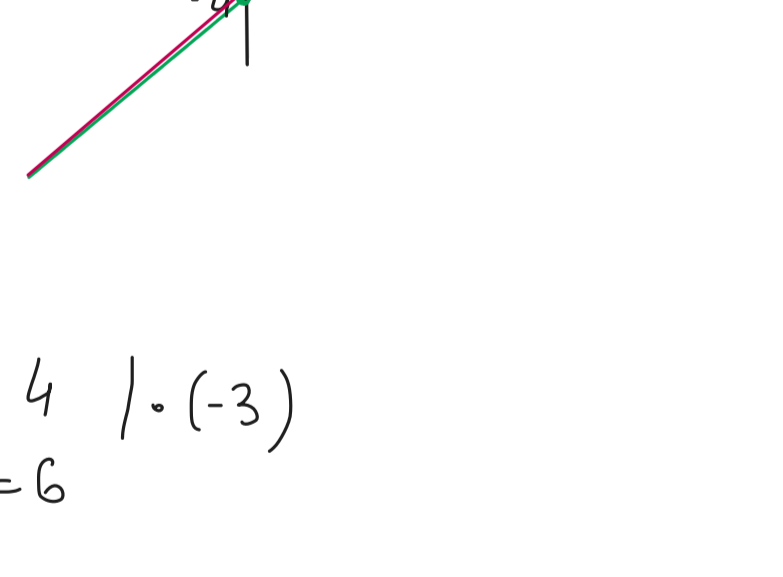
Rozwiązanie graficzne układu: $\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x - 2y = 8 \end{cases}$

Mamy: $\begin{cases} y = x - 4 \\ 2x - 8 = 2y \quad | :2 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = x - 4 \\ y = x - 4 \end{cases}$$

Miejsce zerowe: $x - 4 = 0$

$$\begin{aligned} x &= 4 \end{aligned}$$



d)
$$\begin{cases} x + y = 4 \quad | \cdot (-3) \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x - 3y = -12 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$$

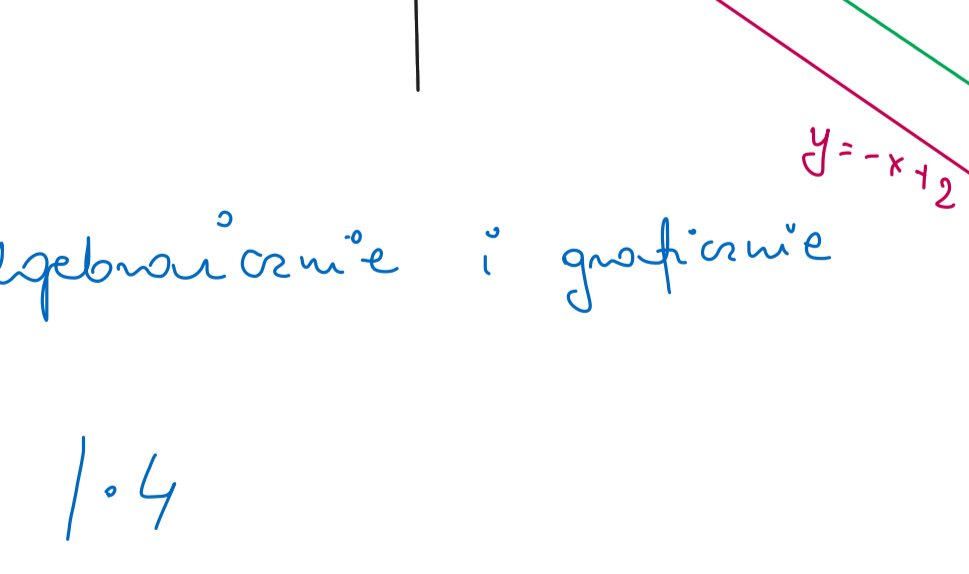
$$\begin{array}{r} 0 = -6 \end{array}$$

Układ sprzeczny (brak rozwiązań)

Rozwiązanie graficzne układu: $\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ 3y - 3x + 6 = 0 \quad | :3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = x - 2 \end{cases}$$



Zadanie Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań:

układ równań:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}x - 1 \quad | \cdot 4 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{4}y + 3 \quad | \cdot 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = x - 4 \\ -x + 2y = y + 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y - x = -4 \\ -x + 2y - y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = -4 & \textcircled{1} \\ -x + y = 12 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 2y = 8 \quad | :2 \\ y = 4 \end{array}$$

Podstawiamy $y = 4$ do $\textcircled{1}$

$$\begin{aligned} x + 4 &= -4 \\ x &= -8 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = -8 \\ y = 4 \end{cases}$$

♥ Praca domowa - rozwiązanie graficzne ♥

😊 Do zobaczenia ♥