Układy dwóch równań liniowych z interpretacją geometryczną cz.2

🙂 Na poprzednich zajęciach rozwiązaliśmy algebraicznie układ równań:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}x - 1 & / \cdot 4 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{4}y + 3 & / \cdot 4 \end{cases}$$

otrzymując jako rozwiązanie parę liczb

$$\begin{cases} x = -8 \\ y = 4 \end{cases}$$ ✅

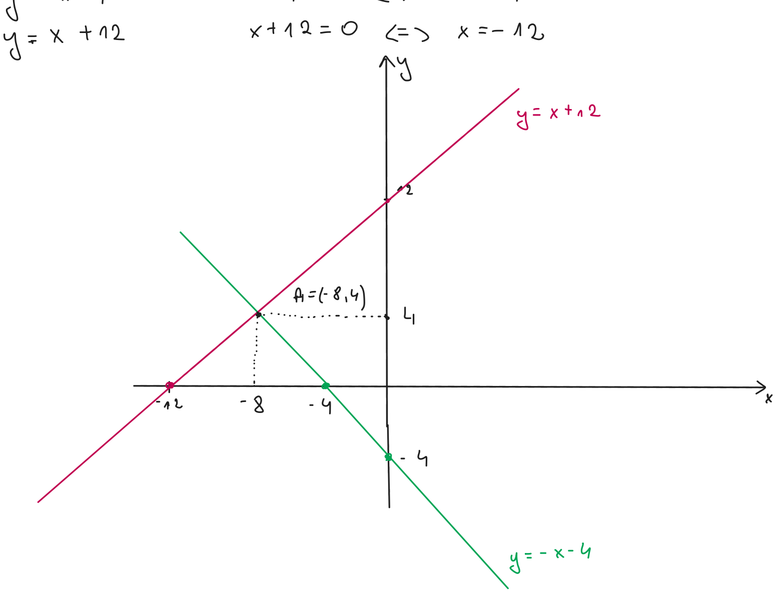
Teraz interpretacja geometryczna:

$$\begin{cases} 2x + y = x - 4 \\ -x + 2y = y + 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x - 4 \\ y = x + 12 \end{cases}$$

$-x - 4 = 0 \iff x = -4$

$x + 12 = 0 \iff x = -12$



❤️ Zadanie Algebraicznie i graficznie rozwiążemy układ równań:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y+1}{3} = 3 & / \cdot 6 \\ \frac{x+1}{3} - \frac{y-2}{6} = 2 & / \cdot 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \cdot (x-1) + 2(y+1) = 18 \\ 2 \cdot (x+1) - (y-2) = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 3 + 2y + 2 = 18 \\ 2x + 2 - y + 2 = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 19 \\ 2x - y = 8 & / \cdot 2 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 3x + 2y = 19 & (1^*) \\ 4x - 2y = 16 & (2^*) \end{cases}$$

$7x = 35 \quad / : 7$

$x = 5$

Podstawiamy $x = 5$ do $3x + 2y = 19$:

$3 \cdot 5 + 2y = 19$

$2y = 4 \quad / : 2$

$y = 2$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$.

Graficzne rozwiązanie układu

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y+1}{3} = 3 \\ \frac{x+1}{3} - \frac{y-2}{6} = 2 \end{cases}$$

skorzystamy z przekształceń (1^*) i (2^*):

$$\begin{cases} 3x + 2y = 19 \\ 4x - 2y = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = -3x + 19 & / : 2 \\ -2y = -4x + 16 & / : (-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + \frac{19}{2} & (A) \\ y = 2x - 8 & (B) \end{cases}$$

Ad. (A) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{19}{2}$

$-\frac{3}{2}x + \frac{19}{2} = 0 \quad / \cdot 2$

$-3x + 19 = 0$

$-3x = -19$

$x = \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}$

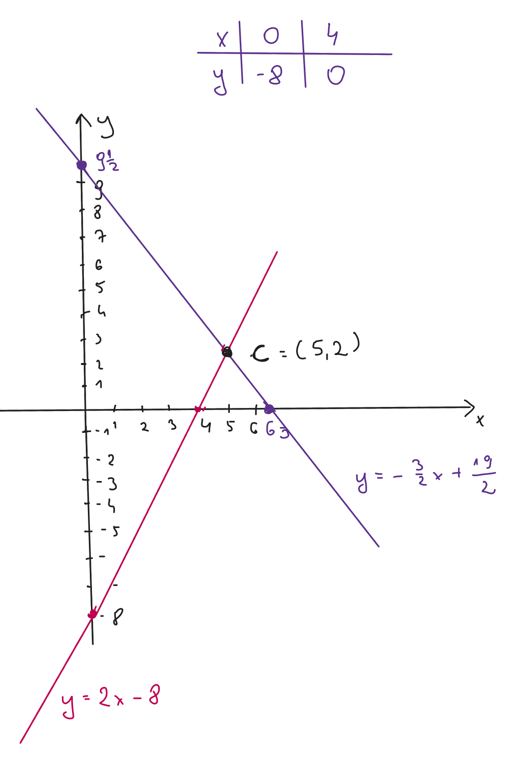
x	0	$6\frac{1}{3}$
y	$\frac{19}{2} = 9\frac{1}{2}$	0

Ad. (B) $y = 2x - 8$

$2x - 8 = 0$

$x = 4$

x	0	4
y	-8	0



Zadanie 🙂 Rozwiążemy algebraicznie i graficznie układ równań:

$$\begin{cases} 2 \cdot |x| + y = 3 \\ |x| + 2y = 6 \end{cases}$$

(1) $x \geq 0$ ∨ (2) $x < 0$

(1)

$$\begin{cases} 2 \cdot x + y = 3 \\ x + 2y = 6 & / \cdot (-2) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -2x - 4y = -12 \end{cases}$$

$-3y = -9 \quad / : (-3)$

$y = 3$

Podstawiamy $y = 3$ do $2x + y = 3$

$2x + \cancel{3} = \cancel{3}$

$2x = 0$

$x = 0$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$ (spełnione jest założenie, że $x \geq 0$)

(2)

$$\begin{cases} 2 \cdot (-x) + y = 3 \\ -x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + y = 3 \\ -x + 2y = 6 & / \cdot (-2) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -2x + y = 3 \\ +2x - 4y = -12 \end{cases}$$

$-3y = -9 \quad / : (-3)$

$y = 3$

Podstawiamy $y = 3$ do $-2x + y = 3$:

$-2x + \cancel{3} = \cancel{3}$

$-2x = 0$

$x = 0$, ale rozważamy $x < 0$

Zatem $x = 0$ odpada.

Tutaj brak rozwiązań.

Odp.: Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 2 \cdot |x| + y = 3 \\ |x| + 2y = 6 \end{cases}$ jest para liczb $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$.

Rozwiązanie graficzne powyższego układu równań.

$$\begin{cases} y = -2|x| + 3 \\ 2 \cdot y = -|x| + 6 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2|x| + 3 & (1) \\ y = -\frac{1}{2}|x| + 3 & (2) \end{cases}$$

Ad. (1) $y = -2|x| + 3$ – narysujemy wykres tej funkcji.

Dla $x \geq 0$ mamy $y = -2 \cdot x + 3$,

x	0	1
y	3	1

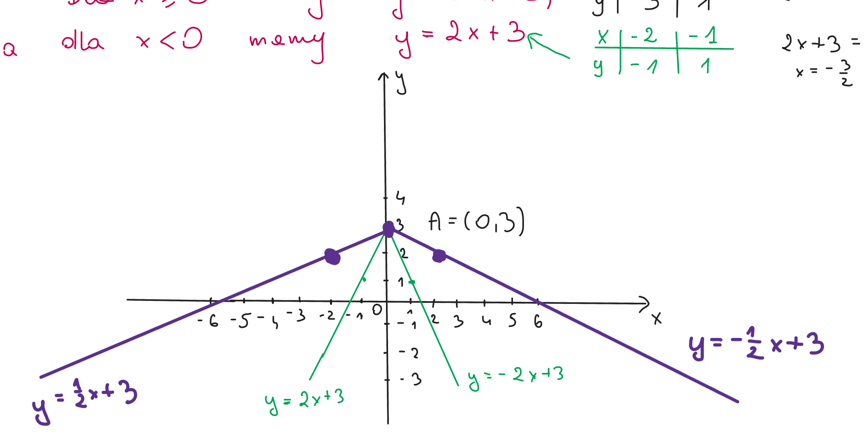
$-2x + 3 = 0 \iff x = \frac{3}{2}$

a dla $x < 0$ mamy $y = 2x + 3$

x	-2	-1
y	-1	1

$2x + 3 = 0$

$x = -\frac{3}{2}$



Ad. (2) $y = -\frac{1}{2}|x| + 3$ – narysujemy wykres tej funkcji:

Dla $x \geq 0$ mamy funkcję $y = -\frac{1}{2}x + 3$,

x	0	2
y	3	2

$-\frac{1}{2}x + 3 = 0$

$-\frac{1}{2}x = -3 \quad / \cdot (-2)$

$x = 6$

a dla $x < 0$ mamy funkcję $y = \frac{1}{2}x + 3$.

x	-2	-4
y	2	+1

$\frac{1}{2}x + 3 = 0$

$\frac{1}{2}x = -3 \quad / \cdot 2$

$x = -6$

Zadanie ❤️ Rozwiążemy algebraicznie i graficznie układ równań:

$$\begin{cases} |x - y| = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

(1) $x - y \geq 0$ ∨ (2) $x - y < 0$

(1)

$x - y \geq 0$

$-y \geq -x \quad / \cdot (-1)$

$y \leq x$

$$\begin{cases} x - y = 1 & / \cdot (-2) \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -2x + 2y = -2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

$3y = 3 \quad / : 3$

$y = 1$

Podstawiamy $y = 1$ do $x - y = 1$

$x - 1 = 1$

$x = 2$

Para $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ spełnia warunek $y \leq x$.

(2)

$x - y < 0$

$-y < -x \quad / \cdot (-1)$

$y > x$

$$\begin{cases} -(x - y) = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + y = 1 & / \cdot (-1) \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

$3x = 4$

$x = \frac{4}{3}$

Podstawiamy $x = \frac{4}{3}$ do $x - y = -1$

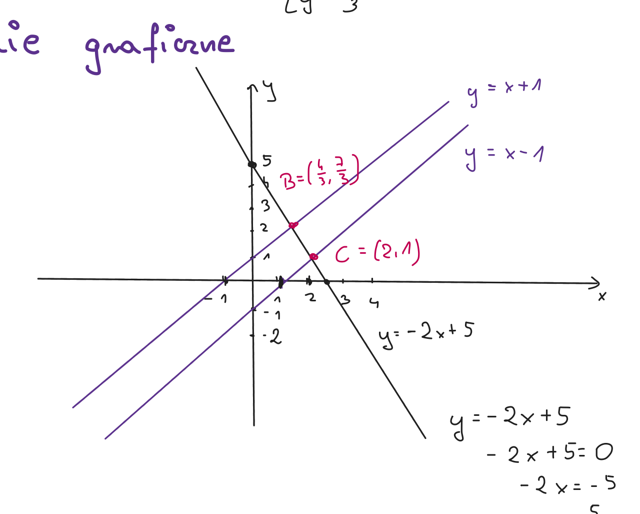
$\frac{4}{3} - y = -1$

$\frac{4}{3} + 1 = y$

$y = \frac{7}{3}$

Para $\begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{7}{3} \end{cases}$ spełnia warunek $y > x$.

Rozwiązanie graficzne



$y = -2x + 5$

$-2x + 5 = 0$

$-2x = -5$

$x = \frac{5}{2}$