Teoria

$D = \mathbb{R}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad D = \mathbb{R}$

$b, c \in \mathbb{R}$ $\quad ZW$

Funkcja kwadratowa jest zdefiniowana wzorem

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Wyróżnik trójmianu kwadratowego:

$$\Delta = b^2 - 4a \cdot c$$

Miejsca zerowe funkcji kwadratowej:

- jeśli $\Delta > 0$, to $\quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

- jeśli $\Delta = 0$, to $\quad x_0 = \frac{-b}{2a},$

- jeśli $\Delta < 0$, to brak miejsc zerowych

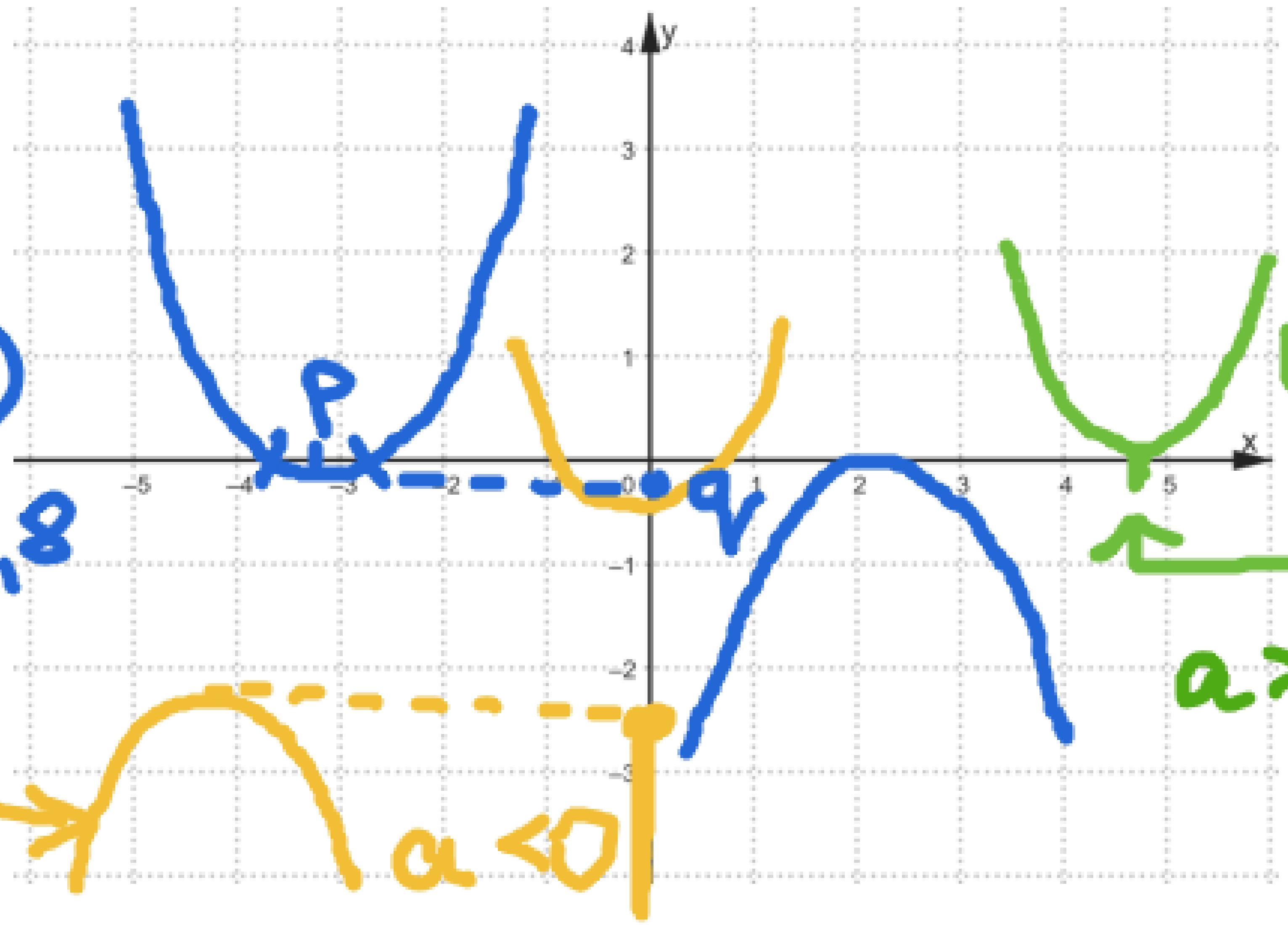
Funkcja kwadratowa

Wykres funkcji kwadratowej (GeoGebra)

$a>0$

$(p,q)=\left(-\frac{33}{10}, -\frac{2}{10}\right)$ $ZW=[-0{,}2;+\infty)$

m.x $-3{,}8$; $-2{,}8$



$ZW=[0,+\infty)$

$x_0=4{,}7$

$a>0$

$ZW=(-\infty;-2{,}5)$

$a<0$

brak m.z.

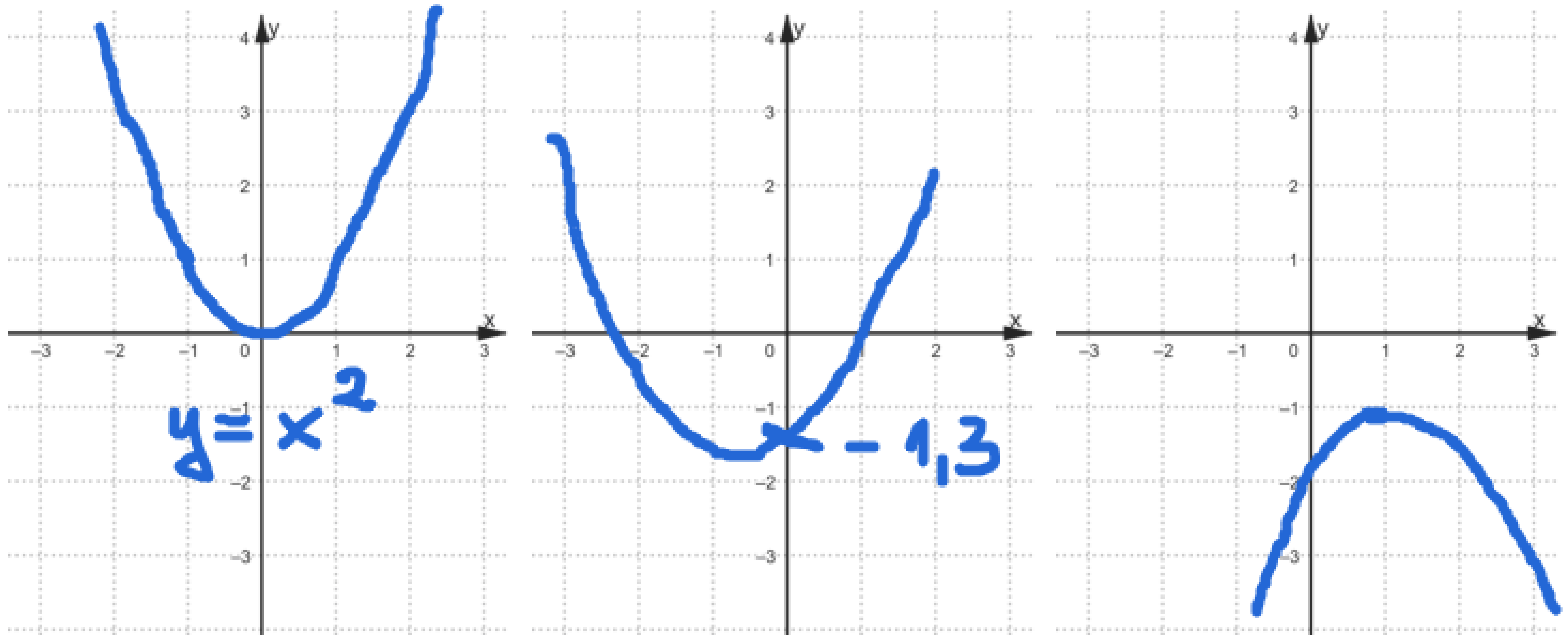
$$\frac{-3{,}8+(-2{,}8)}{2}=-3{,}3$$

Funkcja kwadratowa

$a \neq 0$

Postaci funkcji kwadratowej:

- ogólna $\quad f(x) = ax^2 + bx + c$



$a > 0$

$b = 0$

$c = 0$

$a > 0$

$b = ?$

$c = -1,3 < 0$

$a < 0$

$b = ?$

$c = -2 < 0$

$f(0) = c$

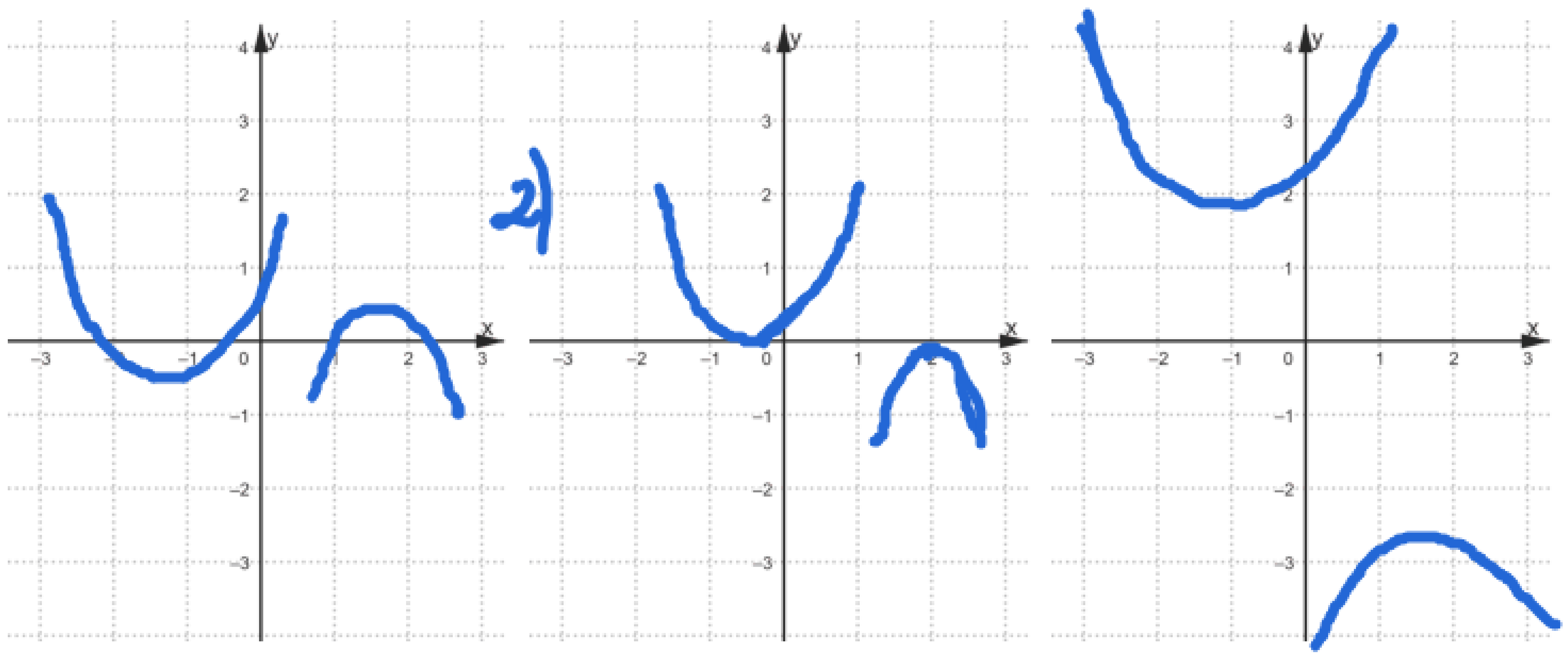
Funkcja kwadratowa

- iloczynowa 1) $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$, gdy $\Delta > 0$

2) $f(x) = a(x-x_0)^2$, gdy $\Delta = 0$

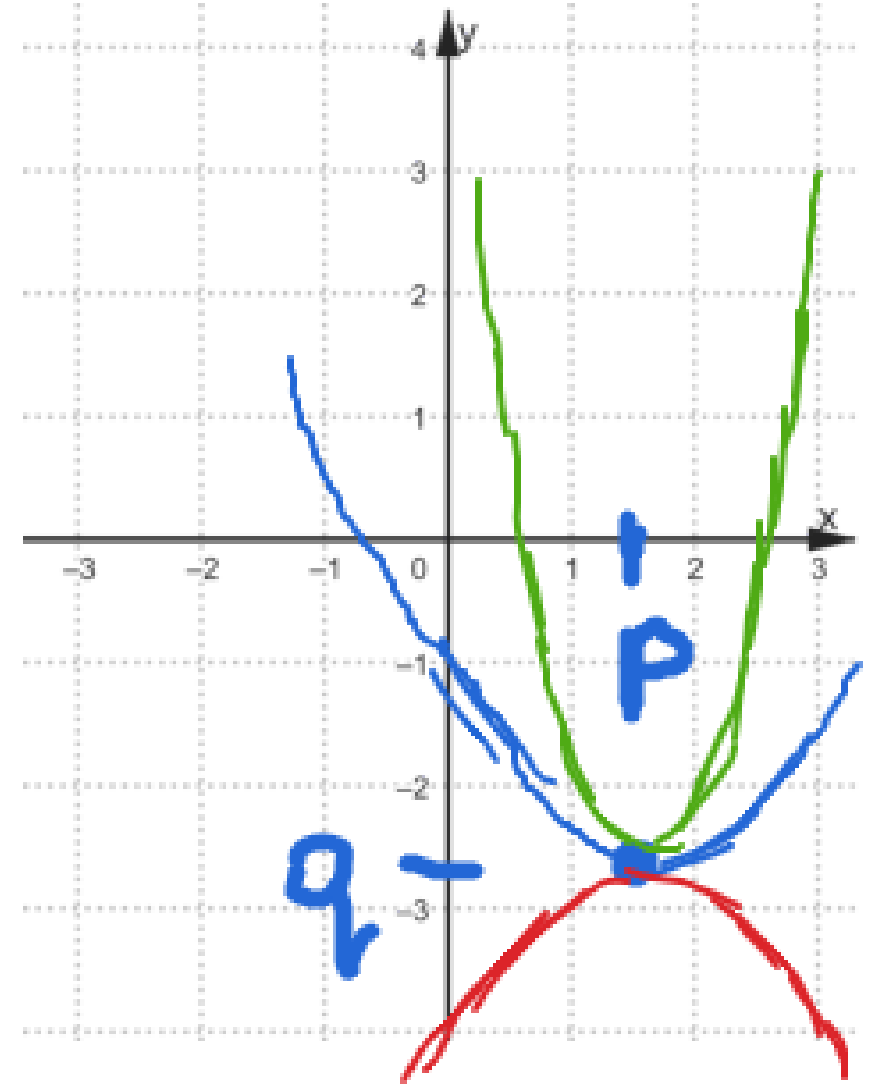
3) w przypadku $\Delta < 0$ brak postaci iloczynowej

1) 2)



Funkcja kwadratowa

- kanoniczna $f(x) = a(x-p)^2+q$ $\qquad (p,q)=W$



$a>1$

$a\in(0,1)$

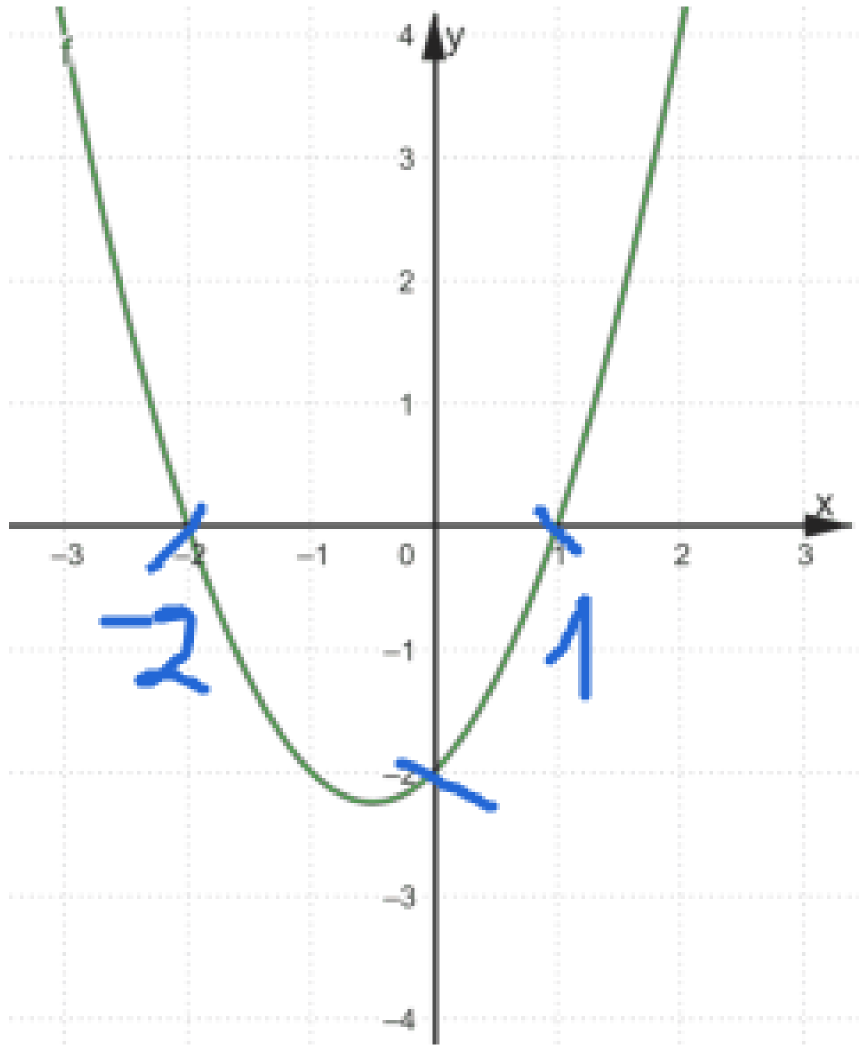
$a<0$

CAŁKOWANIE

$$f(x)=ax^2+bx+c \quad \Longrightarrow \quad p=-\frac{b}{2a} \qquad q=f(p)$$

Zadania

1. Odczytaj znaki współczynników a, b, c z podanych wykresów funkcji kwadratowych. Jeśli to możliwe, odczytaj dokładne wartości tych współczynników.



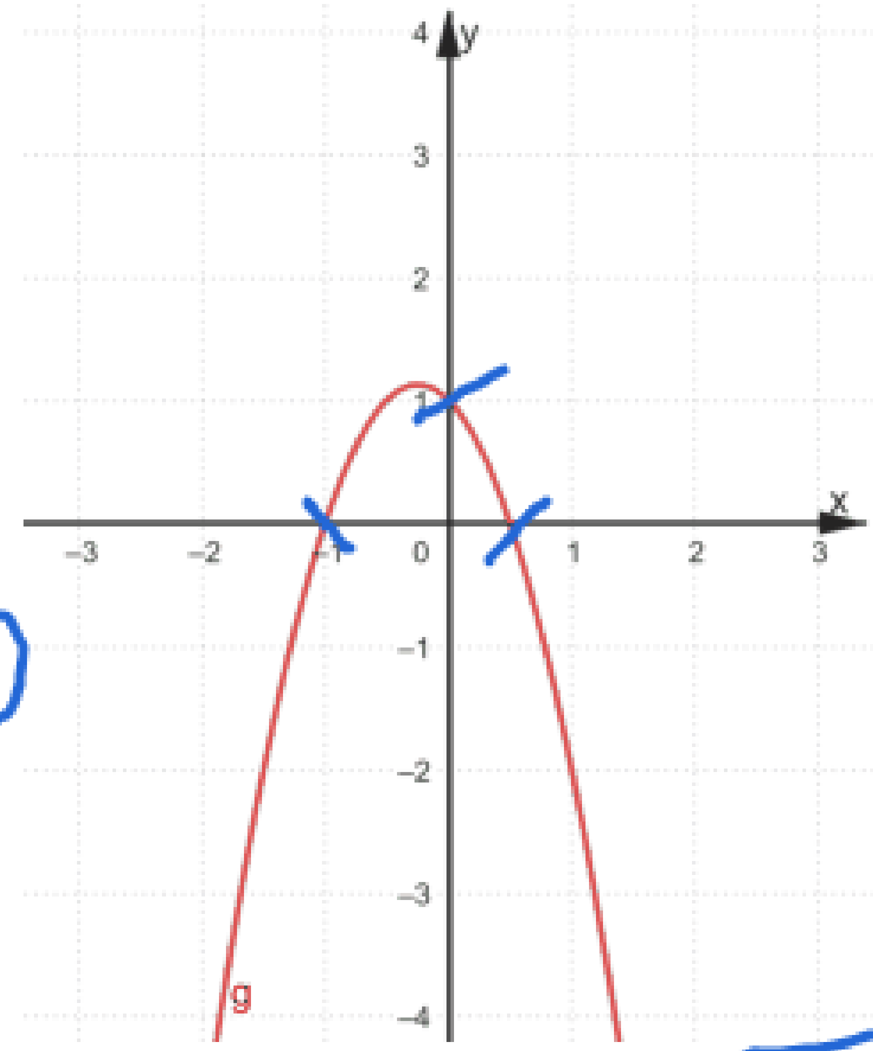
(a)

$a > 0$

$-2 \quad 1$

$c = -2 < 0$

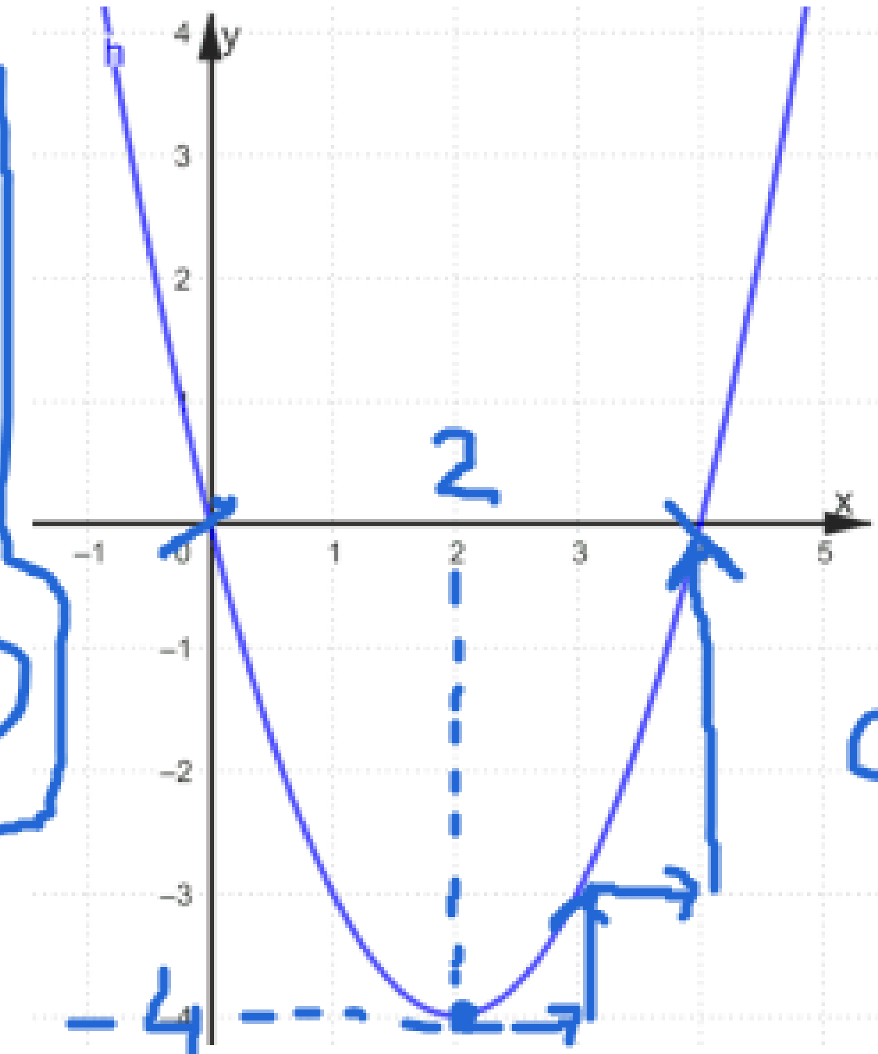
$a(x+2)(x-1)$



(b)

$a < 0$

$c = 1 > 0$



(c)

$a > 0$

2

-4

$c = 0$

$f(x) = x^2 - 4x$

$f(x) = (x-2)^2 - 4$

$a(x-4)\cdot x$

$a = 1$

$f(x) = 1(x-4)x$

2. Znajdź miejsca zerowe funkcji:

(a) $a(x) = x^2 + x - 12$

$\Delta = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-12) = 49 \quad \sqrt{\Delta} = 7$

$x_1 = \frac{-1-7}{2} \qquad x_2 = \frac{-1+7}{2}$

$x_1 = -4 \qquad x_2 = 3$

(b) $b(x) = 6x^2 + 5x + 1$

$\Delta = 25 - 24 = 1$

$x_1 = \frac{-5-1}{12} \qquad x_2 = \frac{-5+1}{12}$

$x_1 = -\frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$

(c) $c(x) = -3x^2 + x - 1$

$\Delta = 1 - 12 < 0$

brak miejsc zerowych

(d) $d(x) = -2x^2 + 3x - 2$

$\Delta = 9 - 16 < 0$

brak miejsc zerowych

$\longrightarrow$ CAŁKOWANIE !

3. Zapisz funkcje w postaci kanonicznej:

$y = a(x-p)^2 + q$

(a) $f(x) = x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$ $\quad W(-3,0)$

połowa tej 4 to 2

$W(-2,-1)$

(b) $g(x) = \underline{x^2 + 4x} + 3 = \underline{(x^2 + 4x + 4) - 4} + 3 = (x+2)^2 - 4 + 3 = (x+2)^2 - 1$

1 $\quad \frac{1}{2}$

(c) $h(x) = -x^2 - x = -[x^2 + x] = -\left[\underbrace{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}_{x^2 + x + \frac{1}{4}} - \frac{1}{4}\right] = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ $\quad W\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

(d) $i(x) = 3x^2 - 12x + 8 = 3(x^2 - 4x) + 8 = 3\left[(x-2)^2 - 4\right] + 8 =$

$= 3(x-2)^2 - 12 + 8 = 3(x-2)^2 - 4$ $\quad W(2,-4)$

$x^2 - 4x + 4 - 4$

Funkcja kwadratowa

(e) $j(x) = -4\,x^2 - 8\,x - 1 = -4\left(x^2+2x\right) - 1 = -4\left[(x+1)^2 - 1\right] - 1 =$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad x^2+2x+1-1$

$= -4(x+1)^2 + 4 - 1 = -4(x+1)^2 + 3$

$W(-1, 3)$

4. Rozwiąż równania i nierówności:

   (a) $2(x-1)^2 - 8 = 0$ (wykorzystamy podaną postać kanoniczną)

   $2(x-1)^2 = 8 \quad |:2$

   $(x-1)^2 = 4 \quad |\sqrt{\ }$

   $(x-1) = 2 \lor \quad (x-1) = -2$

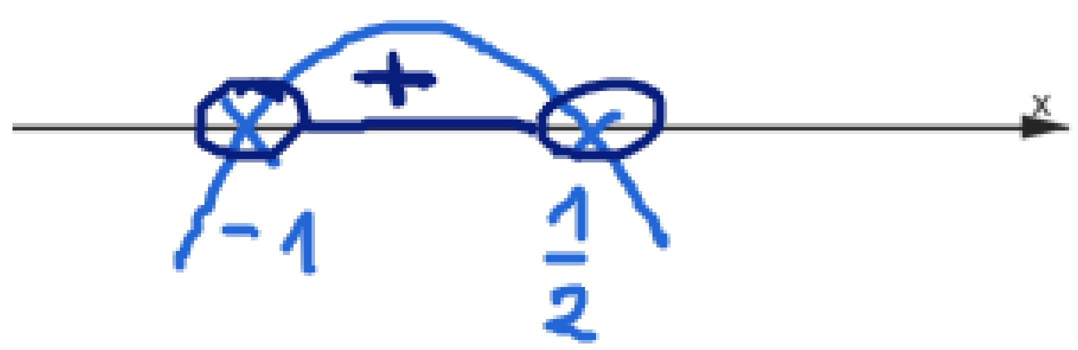
   $x = 3 \lor \quad x = -1$

   (b) $\underbrace{-2\,x^2 - x + 1} > 0$

   $\longrightarrow a < 0$

   $\Delta = (-1)^2 + 8 = 9$

   $x_1 = \frac{1-3}{-4} = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1+3}{-4} = -1$



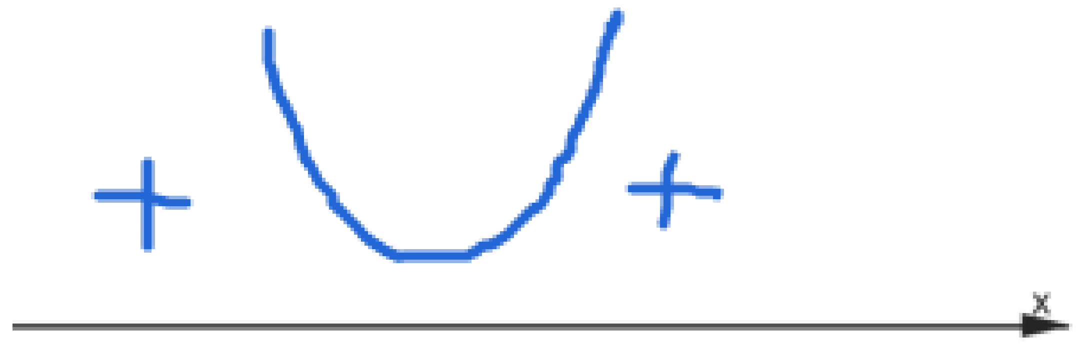
$x \in \left(-1, \frac{1}{2}\right)$

(c) $2x^2 + 4x + 5 \geq 0$ $\quad 2>0$

$\Delta = 16 - 40 < 0$

$\cancel{x_1} =$, $\cancel{x_2} =$

brak miejsc zerowych



$x \in \mathbb{R}$

(d) $-x^2 - 7x \leq 10$

$-x^2 - 7x - 10 \leq 0$

$\Delta = (-7)^2 - 40 = 9$

$x_1 = \frac{7-3}{-2} = -2 \qquad x_2 = \frac{7+3}{-2} = -5$

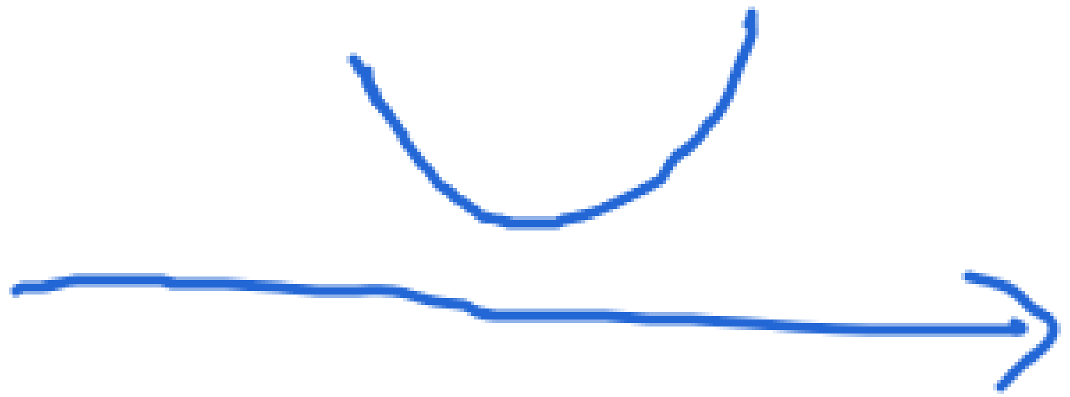
$x \in (-\infty, -5] \cup [-2, +\infty)$

$3>0$

(e) $3\,x^2 - 12\,x + 16 < 0$

$\Delta = 144 - 12 \cdot 16 < 0$

brak m. zerowych



brak rozwiązań

(f) $x^4 - 6x^2 - 16 \leq 0$

$$x^4 - 6x^2 - 16 \leq 0$$

$$(x^2)^2 - 6x^2 - 16 \leq 0$$

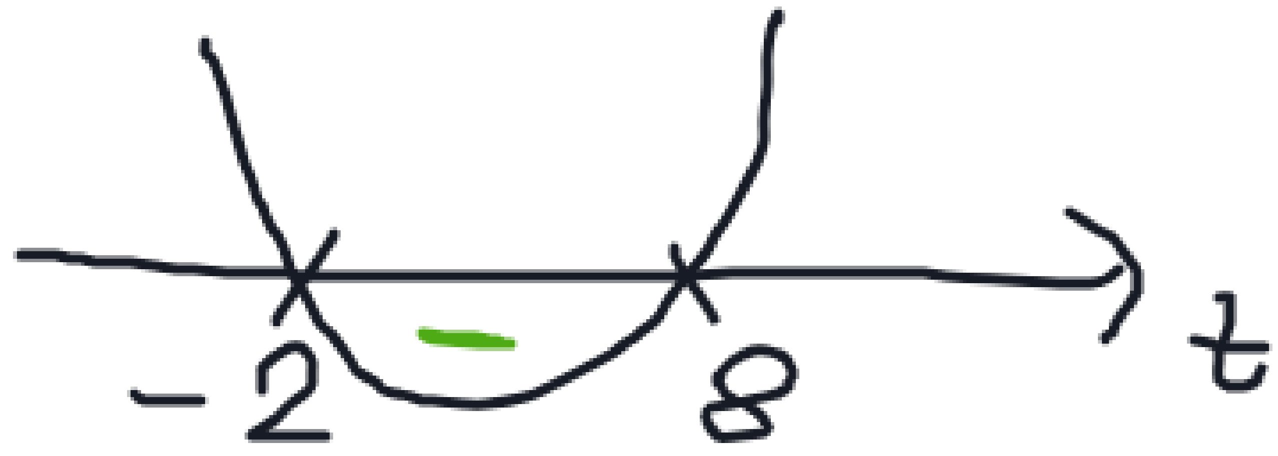
$$t = x^2$$

$$t^2 - 6t - 16 \leq 0$$

[redacted] $\Delta = 36 + 4 \cdot 16 = 100$

$$t_1 = \frac{6-10}{2} \qquad t_2 = \frac{6+10}{2}$$

$$t_1 = -2 \qquad t_2 = 8$$



$t \in [-2, 8]$ ✓

$$t \geq -2 \quad \wedge \quad t \leq 8$$

$$x^2 \geq -2 \quad \wedge \quad x^2 \leq 8$$

$$x \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad x^2 - 8 \leq 0$$

$$(x - \sqrt{8})(x + \sqrt{8}) \leq 0$$

$$x \in [-\sqrt{8}, \sqrt{8}]$$

$$x \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$$