

Wielomiany

Definicja wielomianu

Wzory skróconego mnożenia

Rozkładanie wielomianu na czynniki

Dzielenie wielomianów

Równania wielomianowe

- Jednomianem stopnia n nazywamy funkcję $y = a \cdot x^n$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}_+$.
- Jednomianem stopnia zero jest funkcja $y = a$, $a \neq 0$.
- Funkcja $y = 0$ jest jednomianem zerowym, którego stopnia nie określamy.
- Liść a nazywamy współczynnikiem wielomianu.
- Funkcję zmiennej rzeczywistej x , dawą równanie:

$$w(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$$

$$a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}_+$$
 nazywamy wielomianem stopnia n .
- Jednomian „ w ” stopnia 0 nazywamy też wielomianem stopnia zero.
- Jednomian zerowy ($w \equiv 0$) nazywamy też wielomianem zerowym.
- Jednomiany występujące w wielomianie nazywamy też jego wyrazami.
- Liście $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ nazywamy współczynnikami wielomianu.
- Współczynnik a_0 nazywamy wyrazem wolnym.

Zadanie Wyznacz współczynniki a i b wielomianu, jeśli wiadomo, że

$$W(x) = -3x^3 + a \cdot x^2 + bx + 2, \quad W(-1) = 4, \quad W(2) = 20$$

Rozwiązanie

$$W(-1) = -3 \cdot (-1)^3 + a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 2$$

$$W(-1) = 3 + a - b + 2 = a - b + 5$$

$$W(-1) = 4, \text{ stąd } a - b + 5 = 4$$

$$a - b = -1$$

$$W(2) = -3 \cdot 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 2$$

$$W(2) = -24 + 4a + 2b + 2 = 4a + 2b - 22$$

$$W(2) = 20, \text{ stąd } 4a + 2b - 22 = 20$$

$$4a + 2b = 42 \quad | :2$$

$$2a + b = 21$$

$$+ \begin{cases} a - b = -1 \\ 2a + b = 21 \end{cases}$$

$$a = \frac{20}{3} \quad \text{Podstawiamy } a = \frac{20}{3} \text{ do } a - b = -1$$

$$\frac{20}{3} - b = -1$$

$$\frac{20}{3} + 1 = b$$

$$b = \frac{23}{3}$$

Odp.: $W(x) = -3x^3 + \frac{20}{3}x^2 + \frac{23}{3}x + 2$

Wzory skróconego mnożenia

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $a^3 + b^3 = (a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$

Przykład Pokażemy, że

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^3 = (a+b)^2 \cdot (a+b) = (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a+b) =$$

$$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \text{ co należało pokazać!}$$

Przykład Pokażemy, że

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a-b)^3 = (a-b)^2 \cdot (a-b) = (a^2 - 2ab + b^2) \cdot (a-b) =$$

$$= a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + b^3 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, \text{ co należało pokazać!}$$

Zadanie Zapisz za pomocą sumy algebraicznej:

a) $(\frac{x+2}{x-6})^3 = \left\{ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \right\} =$

$$= x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

b) $(\frac{x+3}{x-6})^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 3 + 3 \cdot x \cdot 3^2 + 3^3 =$

$$= x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

c) $(\frac{x-4}{x-6})^3 = \left\{ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \right\} =$

$$= x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 4 + 3 \cdot x \cdot 4^2 - 4^3 =$$

$$= x^3 - 12x^2 + 48x - 64$$

d) $(\frac{2x-1}{x-6})^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2x \cdot 1^2 - 1^3 =$

$$= 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$$

Zadanie Rozwiąż wielomian na czynniki

a) $W(x) = x^6 - 6x^5 + 9x^4$

$$W(x) = x^4 \cdot (x^2 - 6x + 9)$$

$$W(x) = x^4 \cdot (x-3)^2$$

b) $W(x) = x^5 - 16x$

$$W(x) = x \cdot (x^4 - 16)$$

$$W(x) = x \cdot (x^2 - 4) \cdot (x^2 + 4)$$

$$W(x) = x \cdot (x-2) \cdot (x+2) \cdot (x^2 + 4)$$

c) $W(x) = 6x^5 - x^4 + x^3$

$$W(x) = x^3 \cdot (6x^2 - x + 1)$$

d) $W(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 8$

$$W(x) = x^2(x-4) + 2(x-4)$$

$$W(x) = (x-4) \cdot (x^2 + 2)$$

e) $W(x) = 7x^3 + 2x^2 - 14x - 4$

$$W(x) = x^2 \cdot (7x+2) - 2(7x+2)$$

$$W(x) = (7x+2) \cdot (x^2 - 2)$$

$$W(x) = (7x+2) \cdot (x-\sqrt{2}) \cdot (x+\sqrt{2})$$

f) $W(x) = 4x^5 - 2x^4 - 16x^3 + 8x^2$

$$W(x) = 2x^4 \cdot (2x-1) - 8x^2 \cdot (2x-1)$$

$$W(x) = (2x-1) \cdot (2x^4 - 8x^2)$$

$$W(x) = (2x-1) \cdot 2x^2 \cdot (x^2 - 4)$$

$$W(x) = (2x-1) \cdot 2x^2 \cdot (x-2) \cdot (x+2)$$

Zadanie Rozwiąż równanie

a) $\frac{1}{4}x^3 = x^2$

$$\frac{1}{4}x^3 - x^2 = 0$$

$$x^2 \cdot (\frac{1}{4}x - 1) = 0$$

$$x^2 = 0 \quad \vee \quad \frac{1}{4}x - 1 = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad \frac{1}{4}x = 1 \quad | \cdot 4$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = 4$$

Odp.: $x \in \{0, 4\}$

b) $6x^4 + 2x^3 = 0$

$$2x^3 \cdot (3x+1) = 0$$

$$2x^3 = 0 \quad \vee \quad 3x+1 = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = -\frac{1}{3}$$

Odp.: $x \in \{0, -\frac{1}{3}\}$

c) $x^5 - 2x^4 - 15x^3 = 0$

$$x^3(x^2 - 2x - 15) = 0$$

$$x^3 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$\underline{x=0} \quad \vee \quad \Delta = 4 + 60 = 64, \quad \sqrt{\Delta} = 8$$

$$x = \frac{2-8}{2} = -3 \quad \vee \quad x = \frac{2+8}{2} = 5$$

Odp.: $x \in \{0, -3, 5\}$

d) $5x^3 + 4x^2 + 4x = 0$

$$x \cdot (5x^2 + 4x + 4) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad 5x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$\Delta = (4-80) < 0$$

odp.: $x \in \{0\}$

e) $6x^3 + 9x^2 = 3x^4$

$$3x^4 - 6x^3 - 9x^2 = 0$$

$$3x^2 \cdot (x^2 - 2x - 3) = 0$$

$$3x^2 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Delta = 4 + 12 = 16, \quad \sqrt{\Delta} = 4$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{2-4}{2} = -1 \quad \vee \quad x = \frac{2+4}{2} = 3$$

Odp.: $x \in \{0, -1, 3\}$

Dzielenie wielomianów

Zadanie Wykonaj dzielenie

a) $\frac{3x-4}{(3x^2-x-4) : (x+1)}$

$$= \frac{3x^2 - 4x - 4}{(3x^2 + 3x) - (-4x - 4)}$$

$$= \frac{x-2}{x^2 - 4x}$$

b) $\frac{x-2}{(x^2-6x+8) : (x-4)}$

$$= \frac{x^2 - 2x + 8}{(x^2 - 4x) - (-2x + 8)}$$

$$= \frac{x-2}{x-4}$$

c) $\frac{2x-2}{(2x^3+8x-1) : (x^2+x+3)}$

$$= \frac{-2x^2 + 2x - 1}{(-2x^3 - 2x - 6) - (-2x^3 + 8x - 1)}$$

$$= \frac{4x+5}{\dots}$$

niezostało z dzielenia

d) $\frac{x-2}{(x^4-2x^3+3x^2-2x+1) : (x^3-1)}$

$$= \frac{-2x^3 + 3x^2 - x + 1}{(-2x^3 + 3x^2 - x + 1) - (-2x^3 + 3x^2 - x + 1)}$$

$$= \frac{3x^2 - x + 1}{\dots}$$

niezostało z dzielenia tych wielomianów