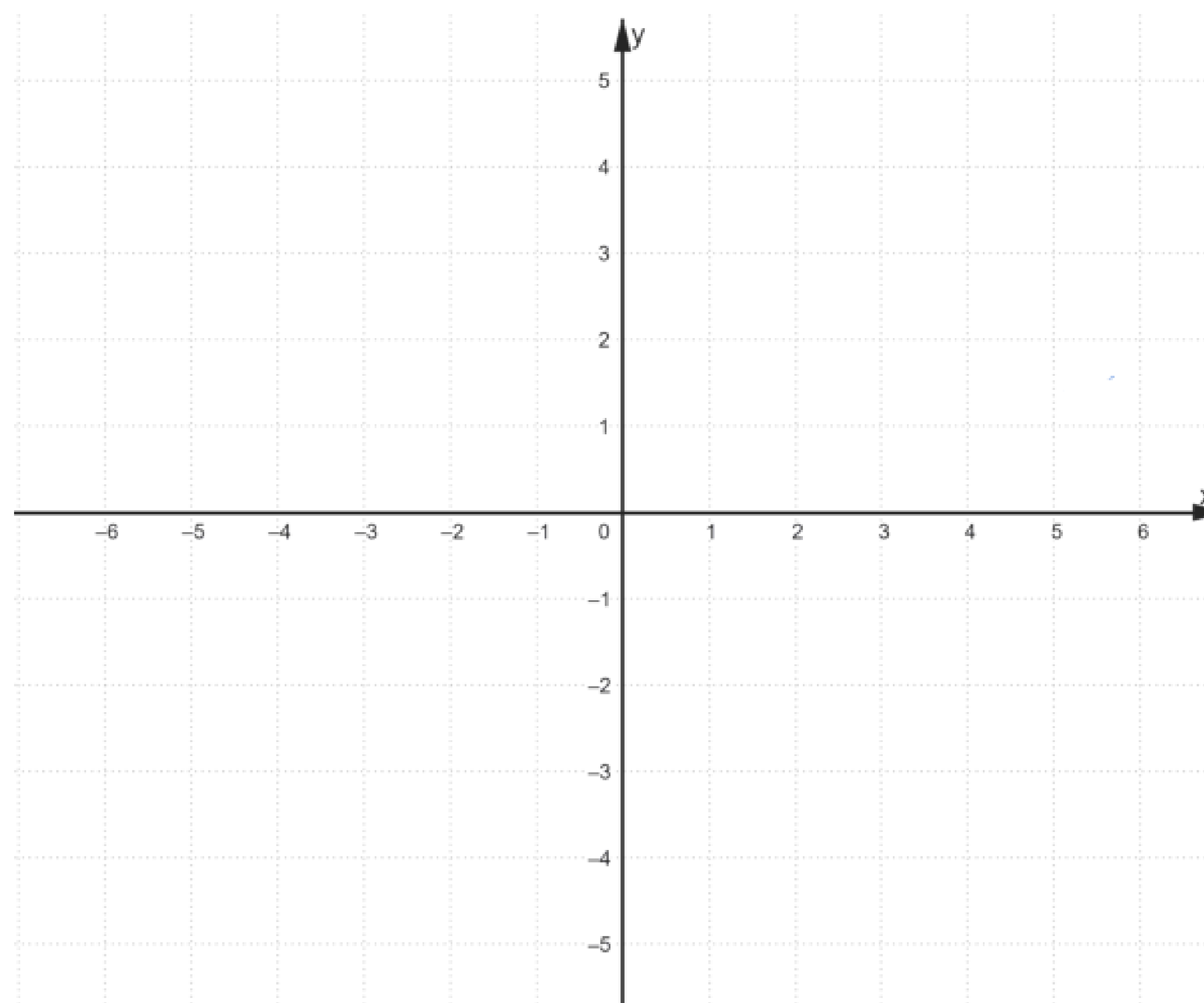


$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

~~scribbles~~

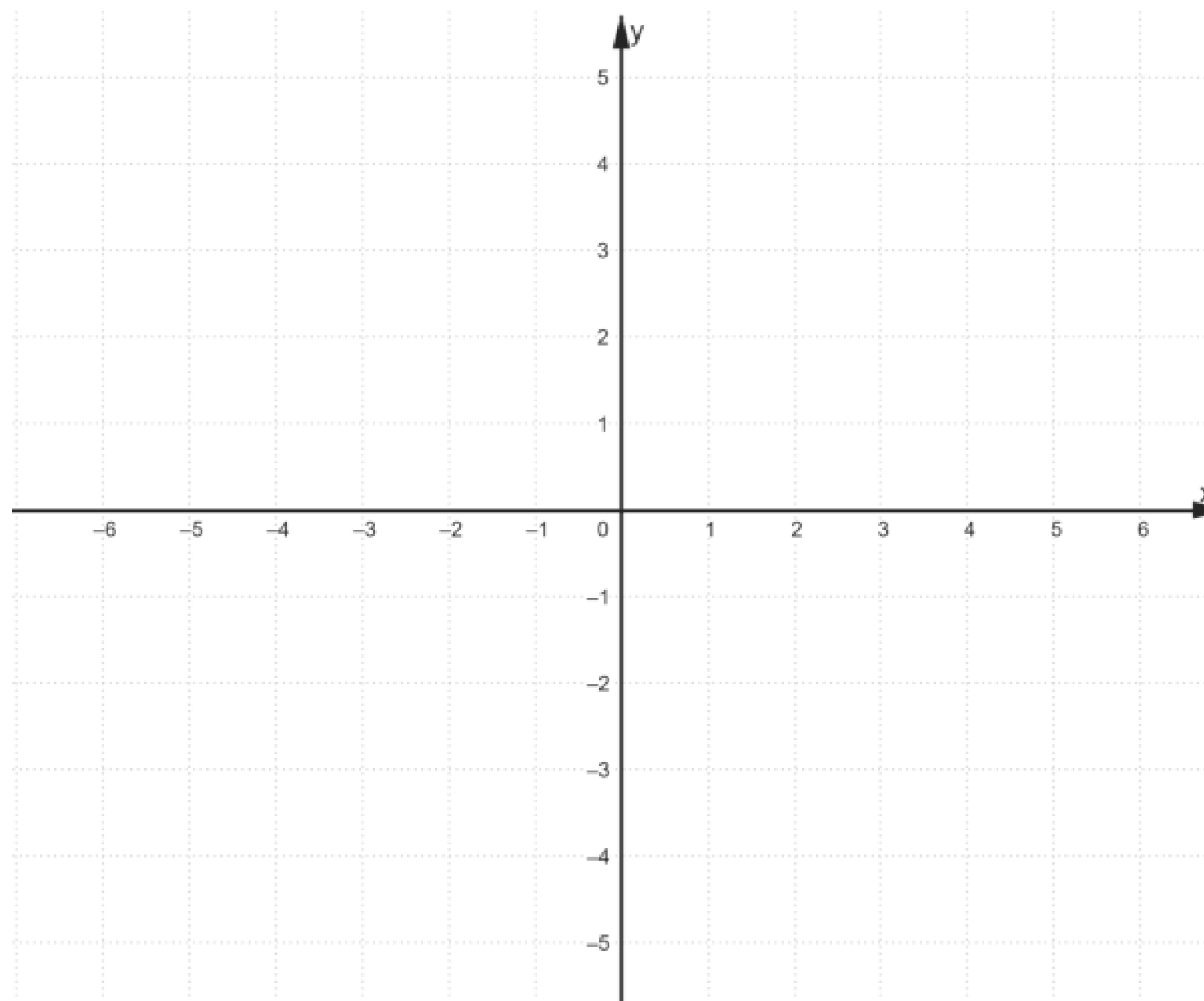
2. Naskicuj zbiory:

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$



Funkcja kwadratowa cd

$$(g) \ l(x) = \begin{cases} |x^2 - 4x| - 1 & \text{dla } x \in (0, +\infty) \\ 1 - |x| & \text{dla } x \in (-\infty, 0] \end{cases}$$



Funkcja kwadratowa cd

$$-\frac{1}{2} - 3 \quad \left[-\frac{1}{2}; -3,5\right] \quad 2x^2 \rightarrow$$

$$2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = 2 \cdot \frac{1}{4} - 1 - 3 = \frac{1}{2} - 4 = -3,5$$

$$(e) f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 2x - 3 & \text{dla } x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x - 3 &= 2(x^2 + x) - 3 = \\ &= 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 3 = \\ &= 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 3,5 \\ &\quad W\left(-\frac{1}{2}; -3,5\right) \end{aligned}$$

$$x=1: 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 3 = 2 + 2 - 3 = 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

$$2W = [-3,5; +\infty)$$

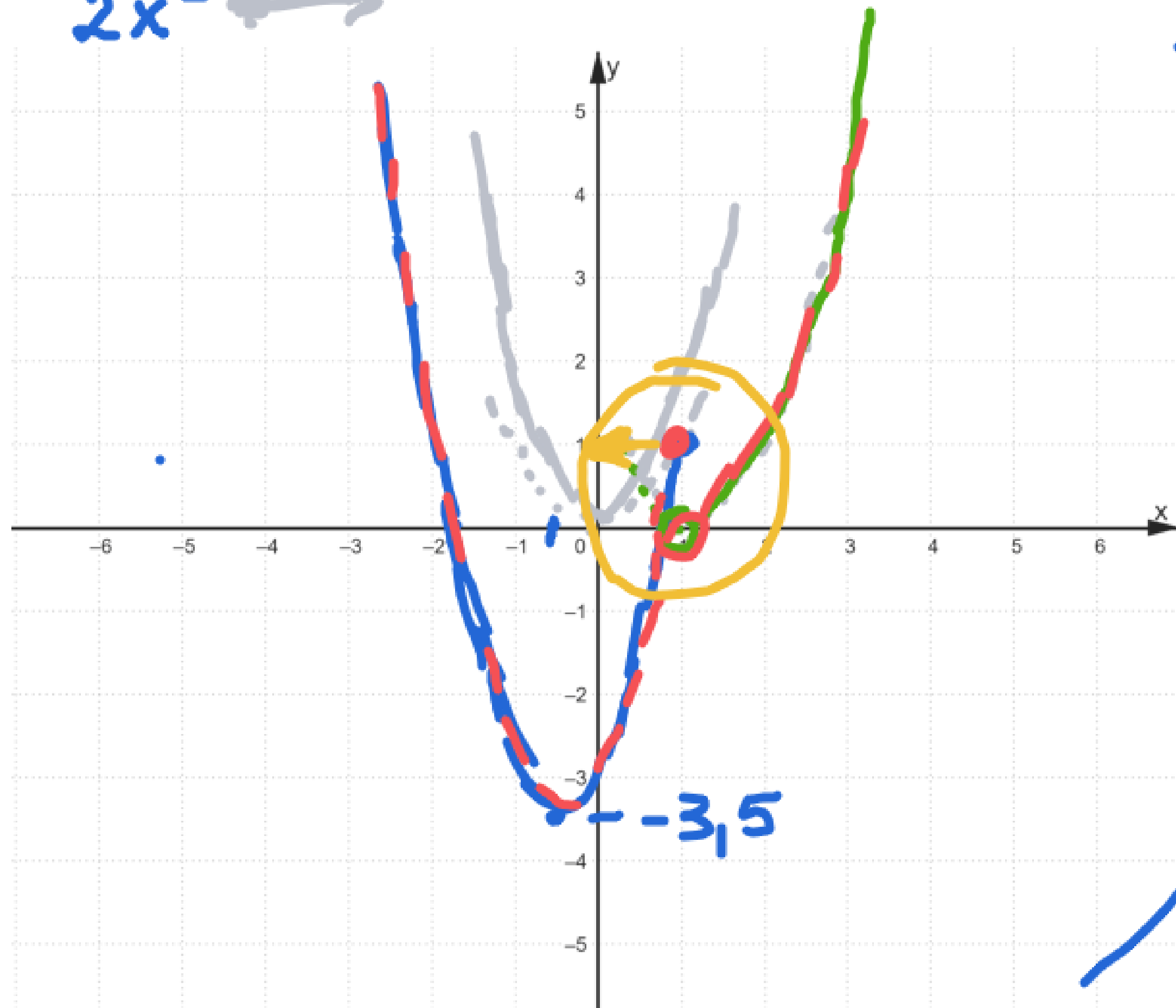
$$f_{\min}\left(-\frac{1}{2}\right) = -3,5$$

2 punkty 1 funkcja f osiąga maksimum lokalne = 1.
 $f \downarrow \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ $f \uparrow \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ $f \uparrow (1, +\infty)$

nie jest równoważnością

—||— parzysta

—||— nieparzysta



Funkcja kwadratowa cd

$$(d) f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{dla } x < 0 \\ -(x-1)^2 + 1 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 2x = x(x+2)$$

$$-(x-1)^2 + 1 \quad W(1,1)$$

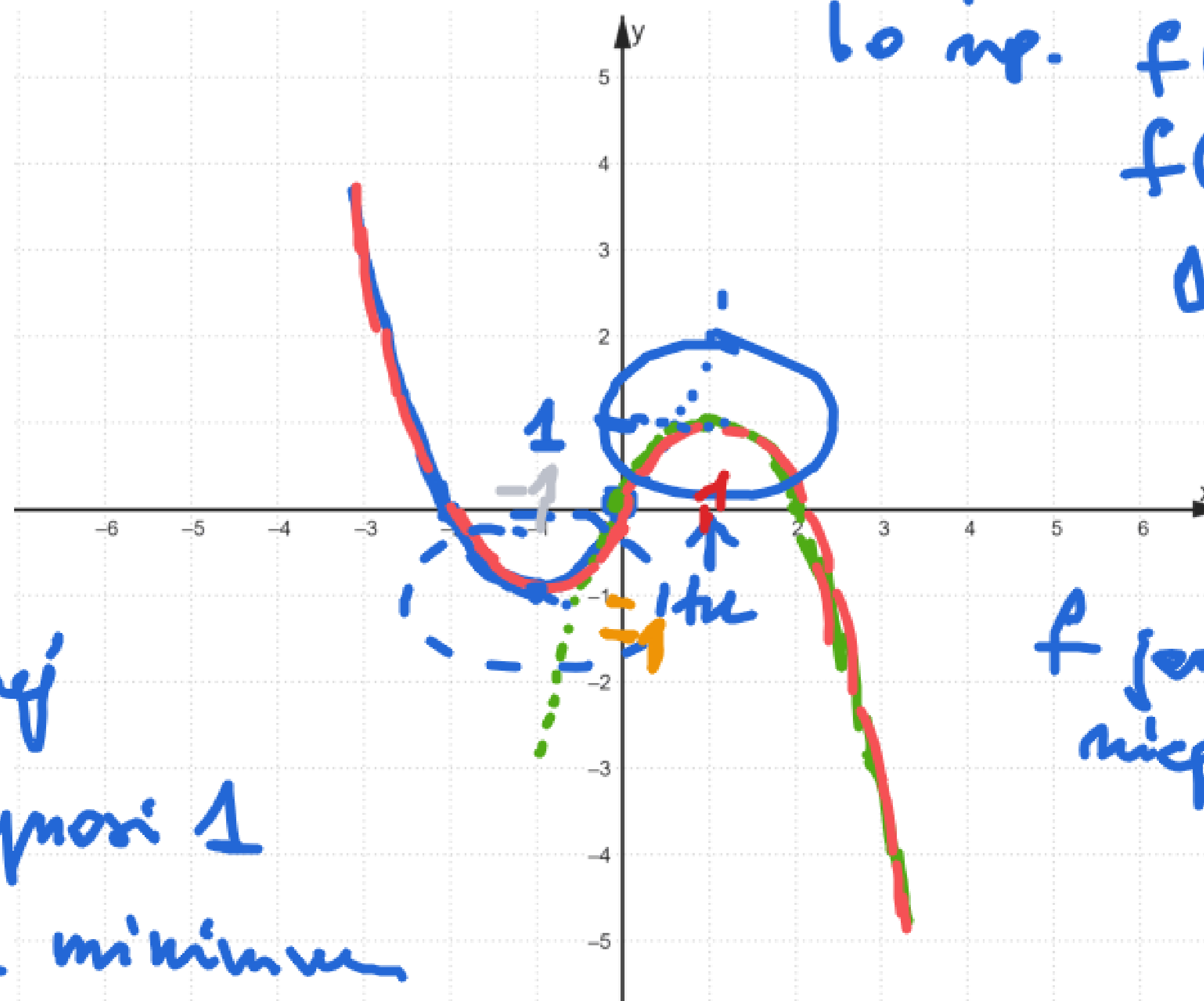
$$ZH = \mathbb{R}$$

nie posiada ani maks. ni
 mef. mglonej, ani mef. mglonej

maksimum lokalne w $x=1$ wynosi 1

w punkcie -1 f. a osiąga minimum
 lokalne równe -1 .

$$f \downarrow (-\infty, -1] \quad , \quad f \uparrow [-1, 1] \quad , \quad f \downarrow [1, +\infty)$$



nie jest różnowartościowa
 bo np. $f(0) = 0$
 $f(2) = 0$
 $0 \neq 2$

f jest
 nieparzysta

Funkcja kwadratowa cd

$$(d) f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{dla } x < 0 \\ -(x-1)^2 + 1 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 2x = x(x+2)$$

$$-(x-1)^2 + 1 \quad W(1,1)$$

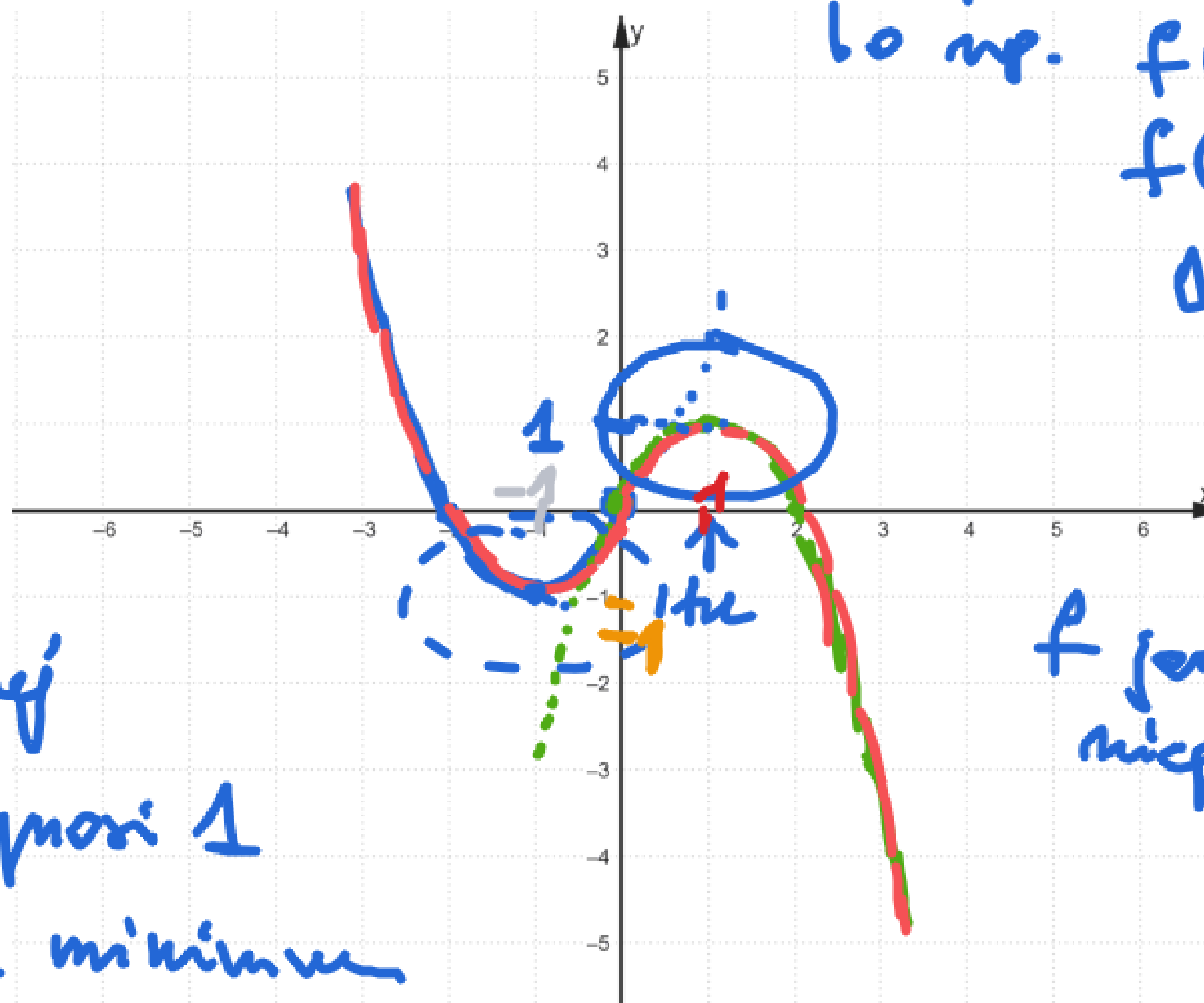
$$ZH = \mathbb{R}$$

nie posiada ani maks. ni
 mef. mglonej, ani mef. mglonej

maksimum lokalne w $x=1$ wynosi 1

w punkcie -1 f. a osiąga minimum
 lokalne równe -1 .

$$f \downarrow (-\infty, -1] \quad , \quad f \uparrow [-1, 1] \quad , \quad f \downarrow [1, +\infty)$$



nie jest różnowartościowa
 bo np. $f(0) = 0$
 $f(2) = 0$
 $0 \neq 2$

f jest
 nieparzysta

Funkcja kwadratowa cd

$$(c) \ h(x) = -2x^2 + 4x = -2x(x-2)$$

$$mx : 0, 2$$

$$W(1, 2)$$

$$h(1) = -2(-1) = 2$$

$$2W = (-\infty, 2]$$

$$f_{\max}(1) = 2$$

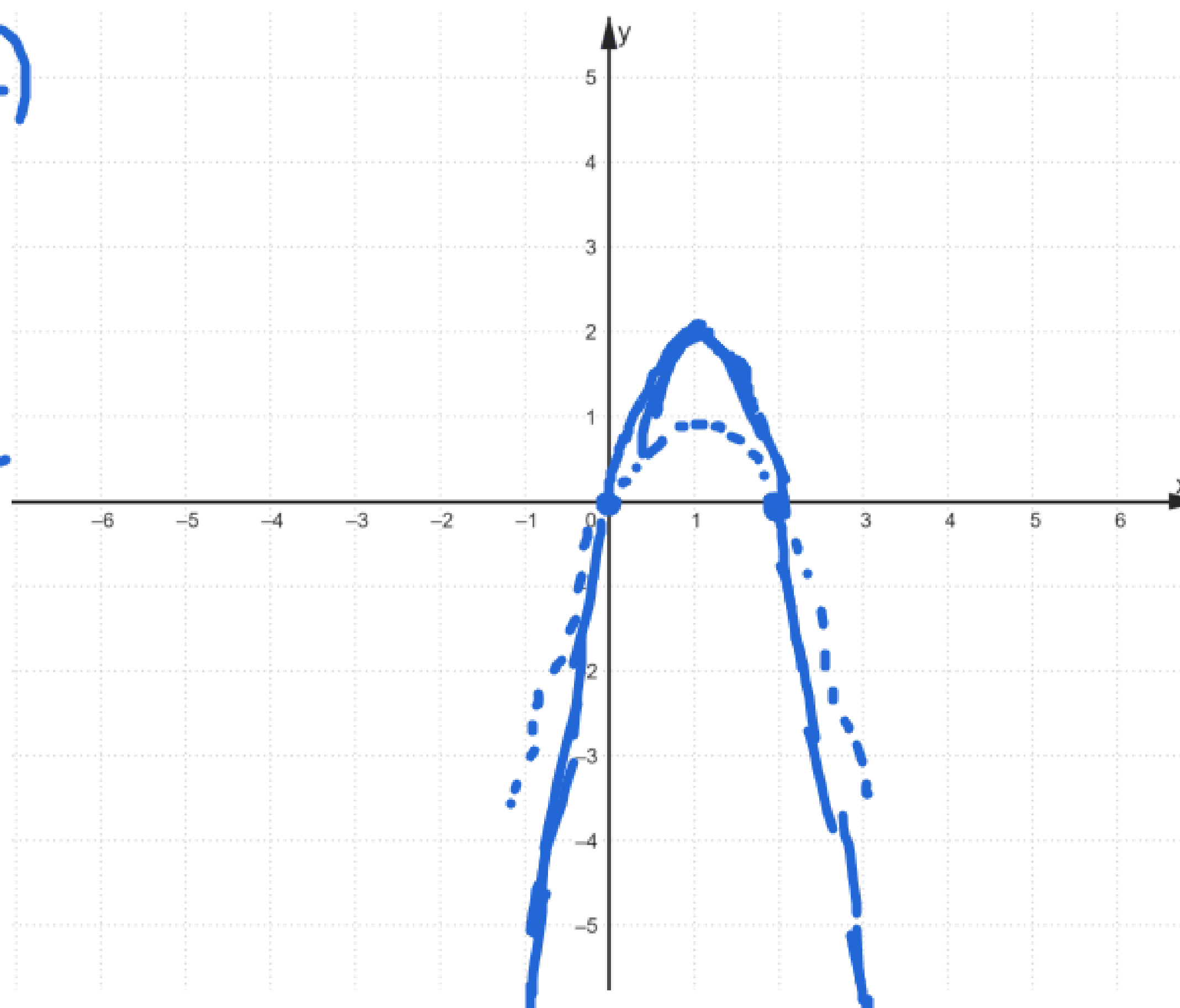
$$f \nearrow (-\infty, 1]$$

$$f \searrow [1, +\infty)$$

nie jest parzysta

—|— nieparzysta

—||— równoważnościowe



Funkcja kwadratowa cd

(-1)

$$(c) h(x) = -2x^2 + 4x = -2x(x-2)$$

$$mx : 0, 2$$

$$W(1, 2)$$

$$h(1) = -2(-1) = 2$$

$$2W = (-\infty, 2]$$

$$f_{\max}(1) = 2$$

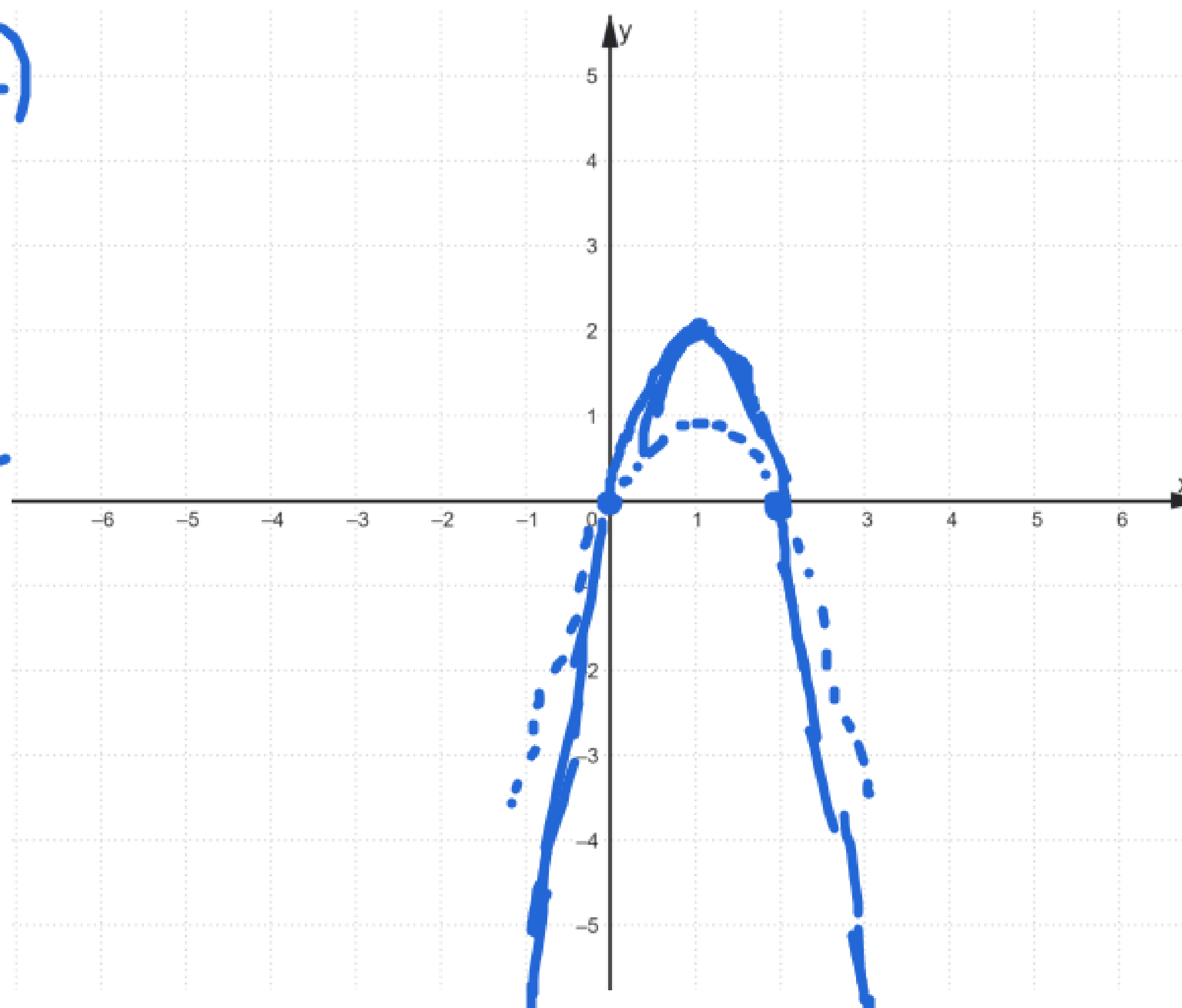
$$f \nearrow (-\infty, 1]$$

$$f \searrow [1, +\infty)$$

nie jest parzysta

-||- nieparzysta

-||- różnowartościowa



Funkcja kwadratowa cd

$$(b) \ g(x) = x^2 + 4x + 5 = (x^2 + 4x + 4) + 1$$

$$= (x+2)^2 + 1$$

$$W(-2, 1)$$

$$ZW = [1, \infty)$$

$$f_{\min}(-2) = 1$$

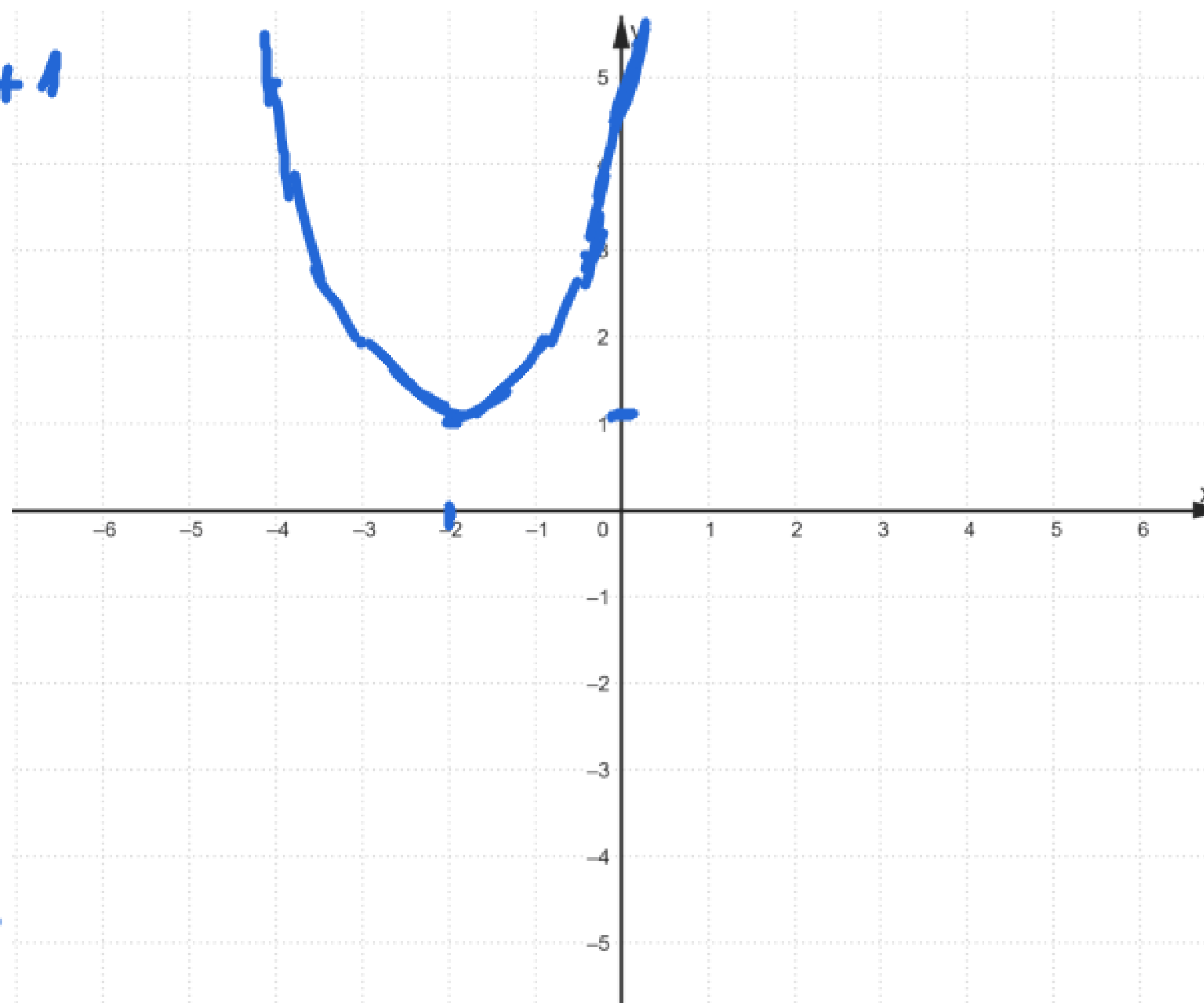
$$f \nearrow [-2, +\infty)$$

$$f \searrow (-\infty, -2]$$

nie jest różnowartościowa

nie jest parzysta

—||— nieparzysta



$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Zadania

9

1. Naskicuj wykres funkcji. Wyznacz zbiór wartości funkcji. Wskaż wartość największą i najmniejszą. Określ przedziały monotoniczności. Czy funkcja jest różnowartościowa? Dlaczego? Czy funkcja jest parzysta albo nieparzysta? Uzasadnij odpowiedź.

(a) $f(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ $\downarrow$ nie parzysta $\swarrow$

$W(3,0)$ $\uparrow$ $x_0 = 3$
 $(0,9)$

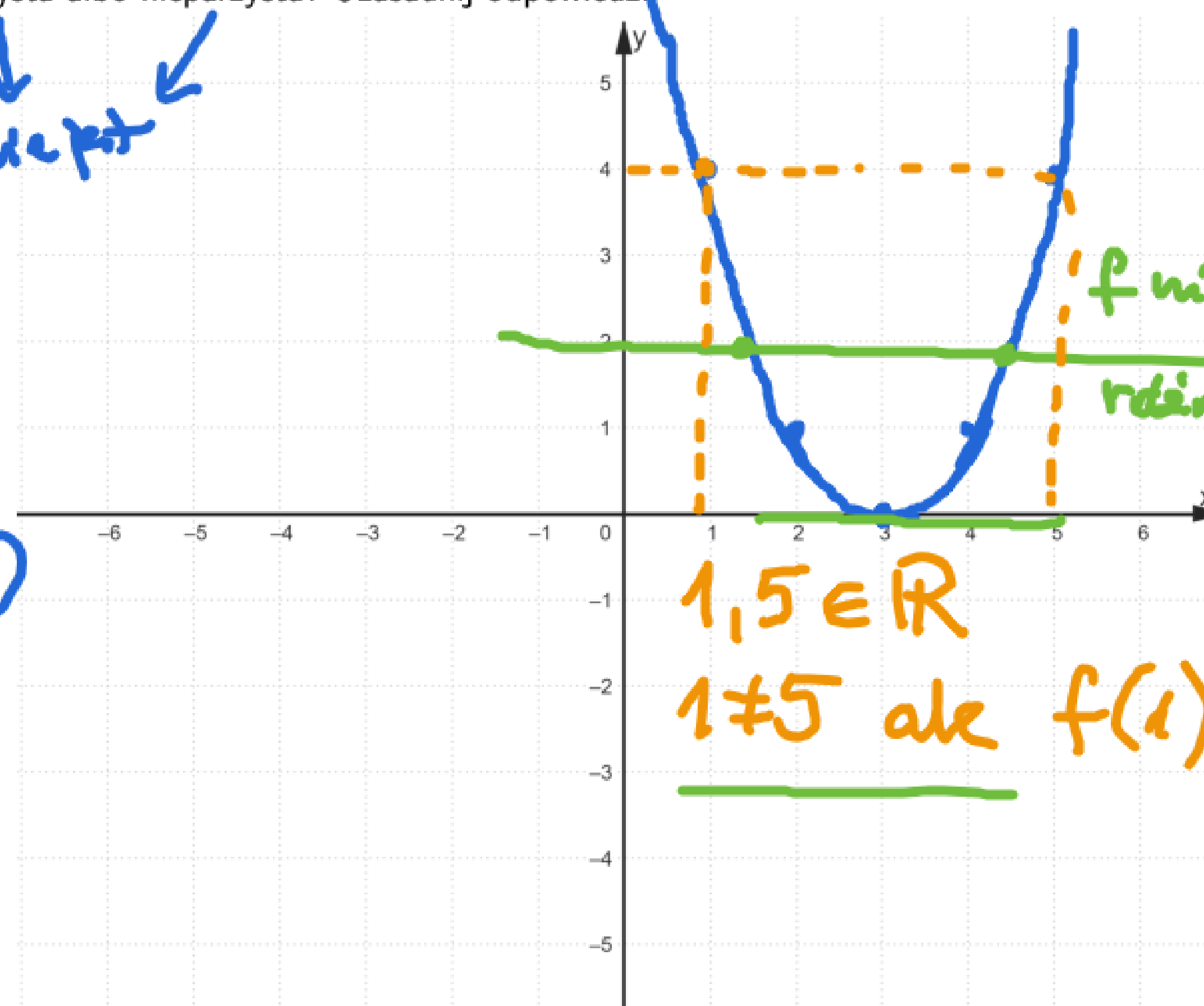
$$ZW = [0, \infty)$$

max = nie istnieje

min = 0 $f_{\min}(3) = 0$

$$f \downarrow (-\infty, 3]$$

$$f \nearrow [3, +\infty)$$



$$1,5 \in \mathbb{R}$$

$$1 \neq 5 \text{ ale } f(1) = f(5)$$

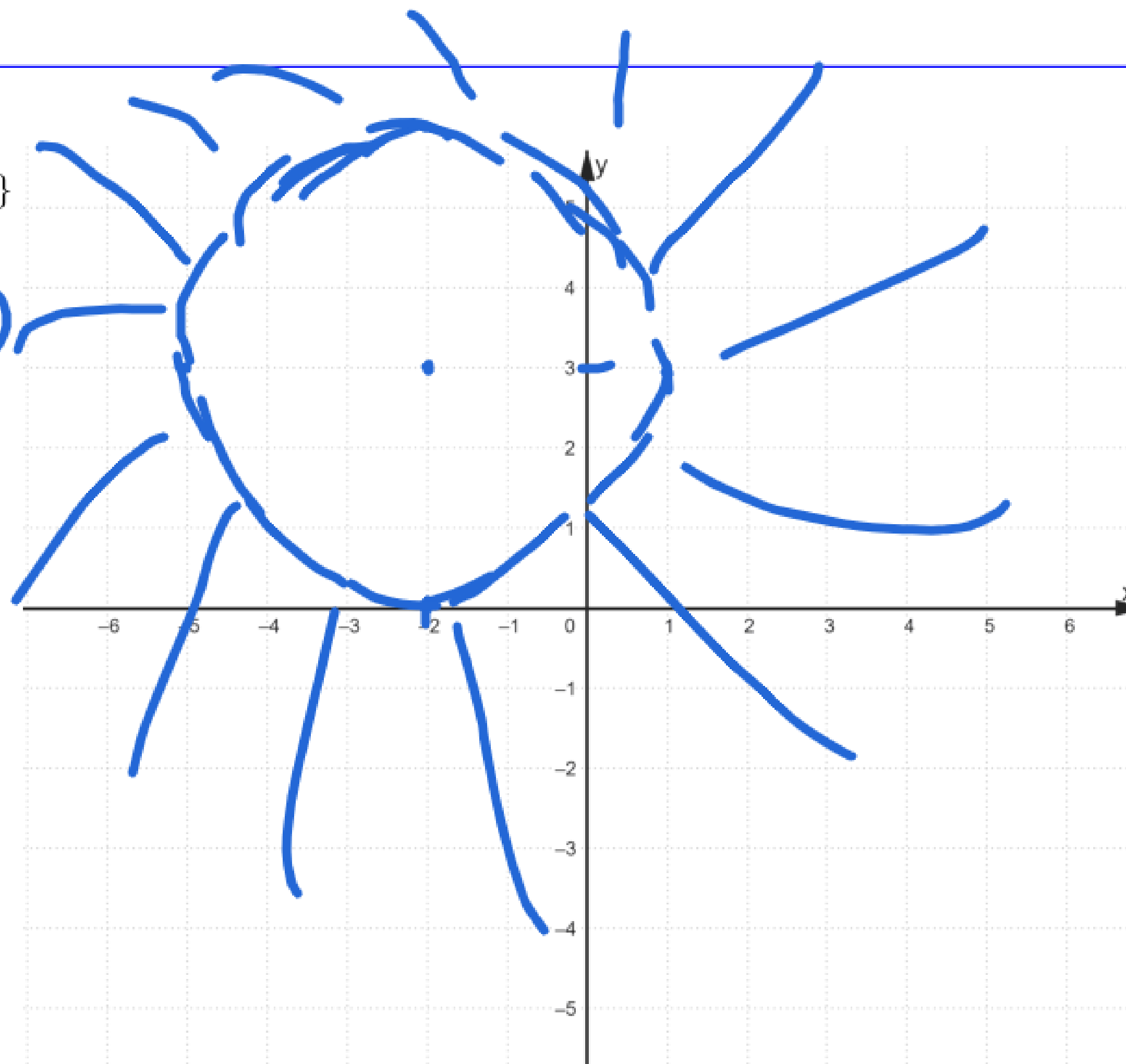
Funkcja kwadratowa cd

$$(i) I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4x + y^2 - 6y + 4 \geq 0\}$$

$$\frac{(x+2)^2}{x^2+4x+4} + \frac{(y-3)^2}{y^2-6y+9} \geq 0$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 \geq 9$$

$$(-2, 3) \quad r=3$$



5. Rozwiąż równania i nierówności:

$$(a) 2(x-1)^2 - 8 = 0 \text{ (wykorzystamy podaną postać kanoniczną)}$$

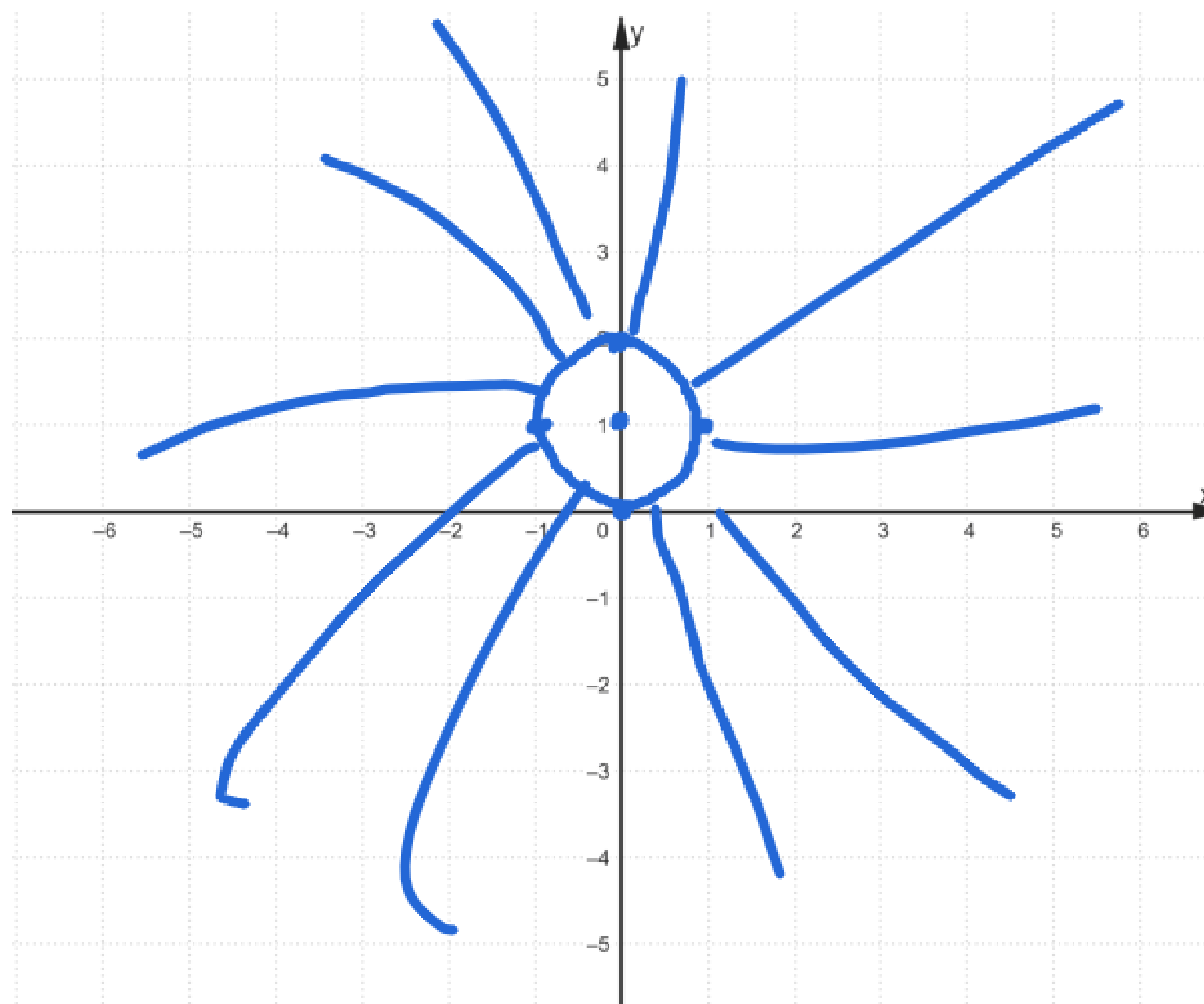
$$(h) H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2y \geq 0\}$$

$$x^2 + \underbrace{y^2 - 2y}_{y^2 - 2y + 1 - 1} = 0$$

$$x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$

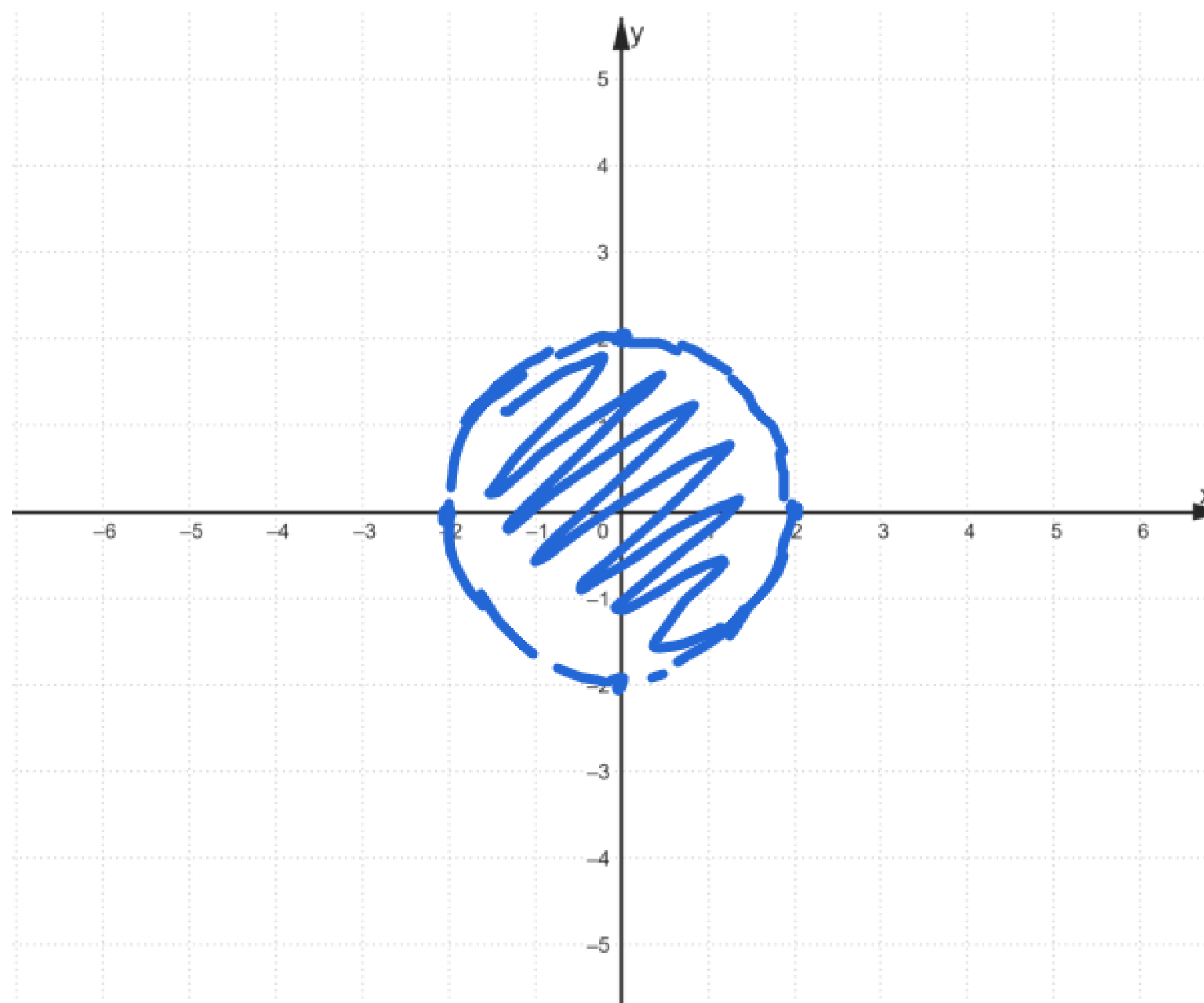
$$S(0, 1) \cdot r = 1$$



Funkcja kwadratowa cd

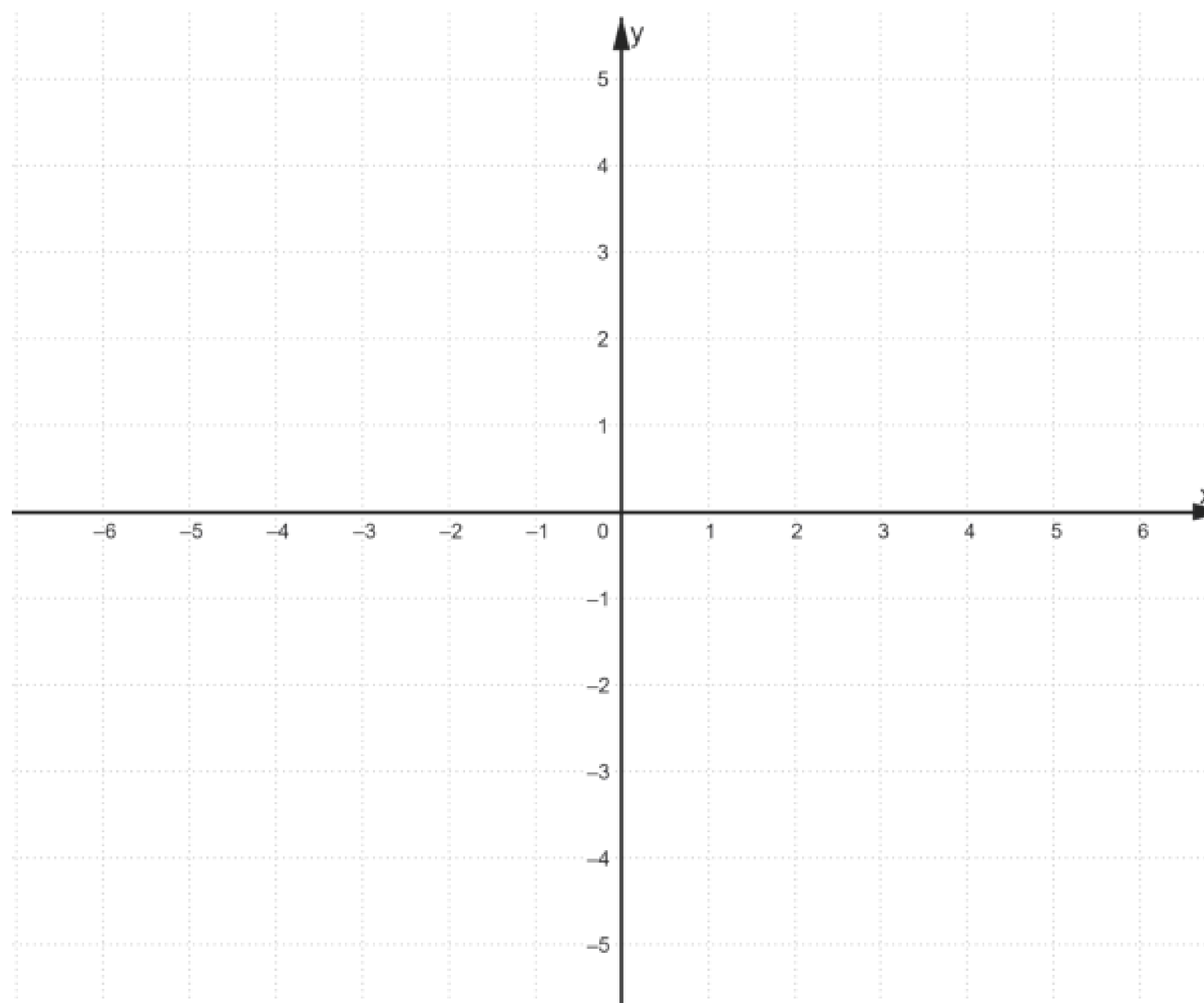
(g) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$

$$x^2 + y^2 = 4 \\ \parallel \\ 2^2$$



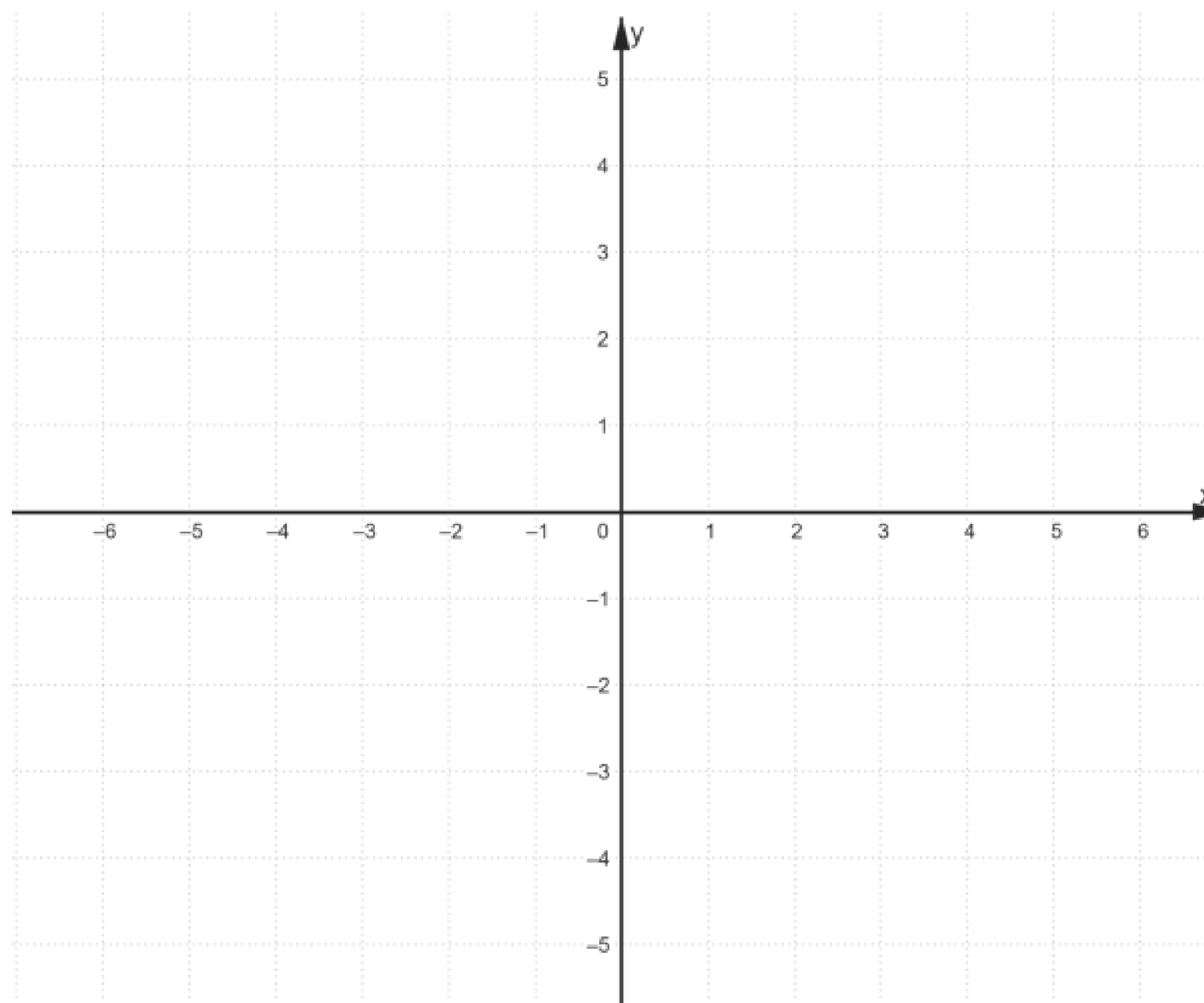
Funkcja kwadratowa cd

(f) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < -x^2 - 1 \vee x > y^2 - 2\}$



Funkcja kwadratowa cd

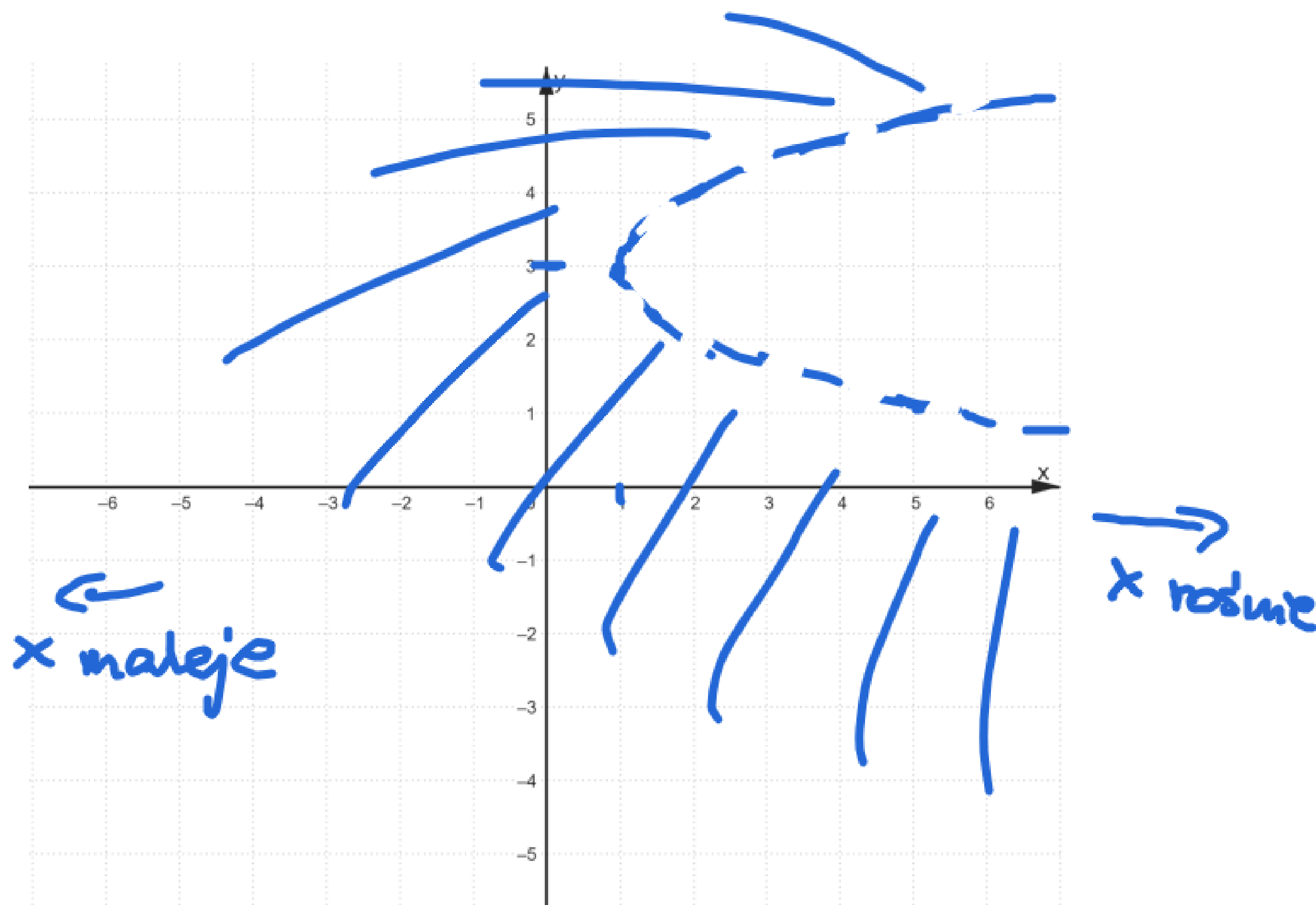
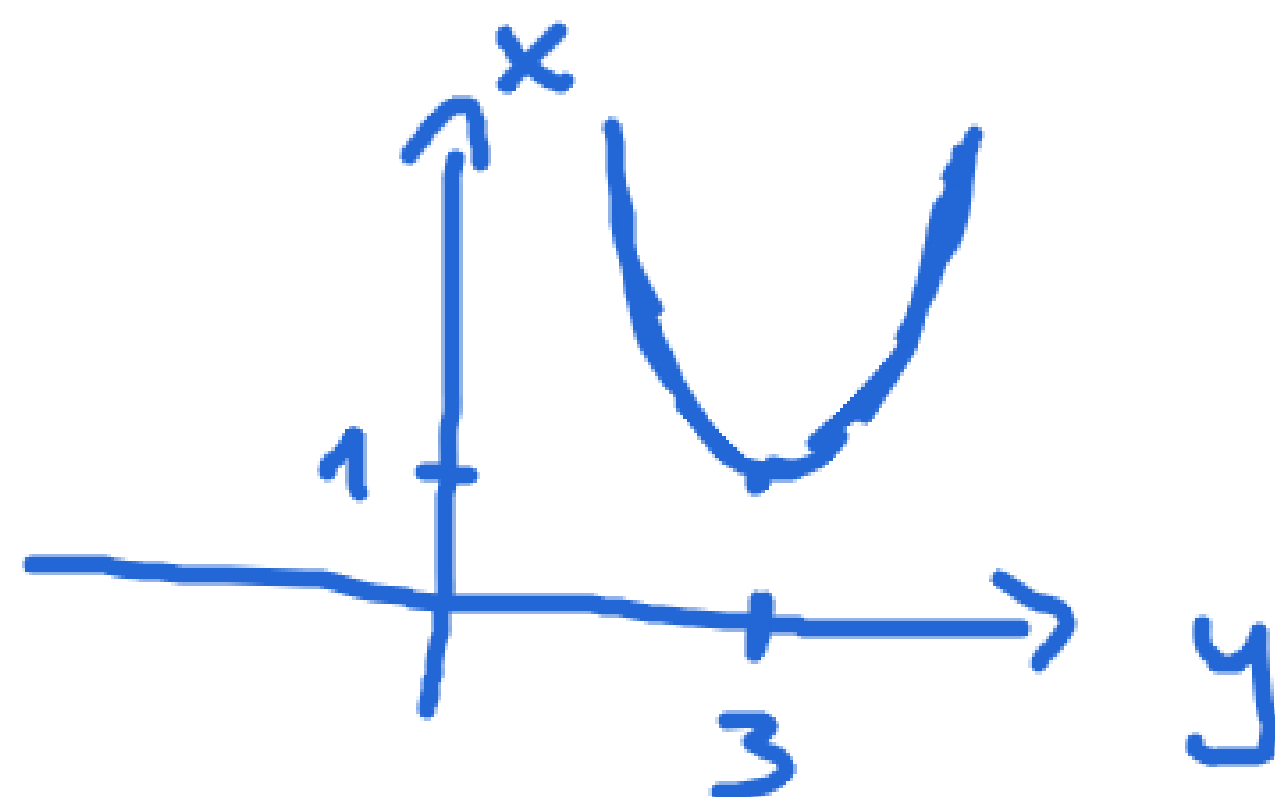
(e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq -(y+2)^2 - 1 \wedge y < (x+4)^2 - 2\}$



Funkcja kwadratowa cd

(d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < (y - 3)^2 + 1\}$

$$x = (y - 3)^2 + 1$$



Funkcja kwadratowa cd

$$(c) C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3x \leq 0\}$$

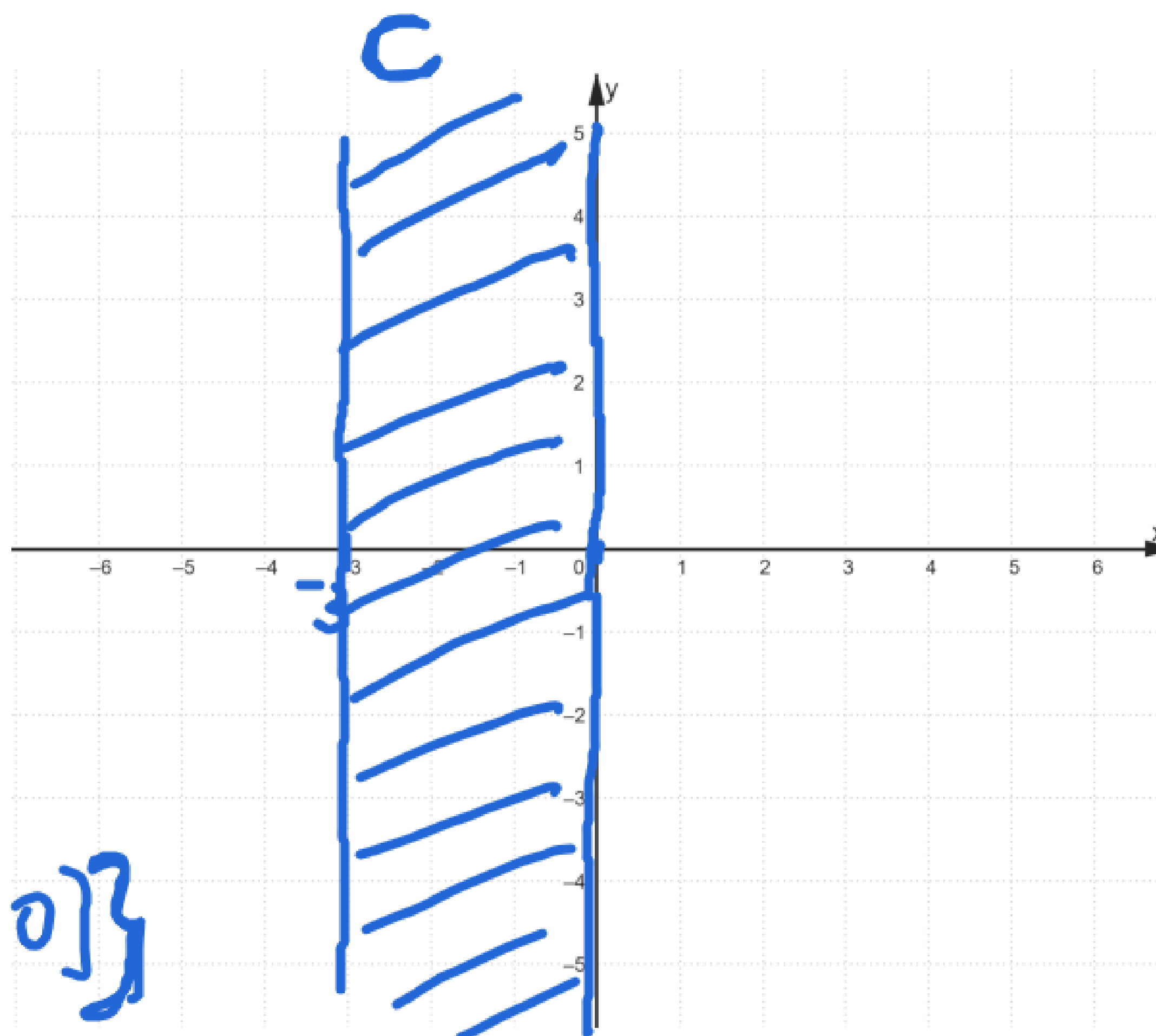
$$x^2 + 3x \leq 0$$

$$x(x+3) \leq 0$$



$$x \in [-3, 0]$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-3, 0]\}$$



Funkcja kwadratowa cd

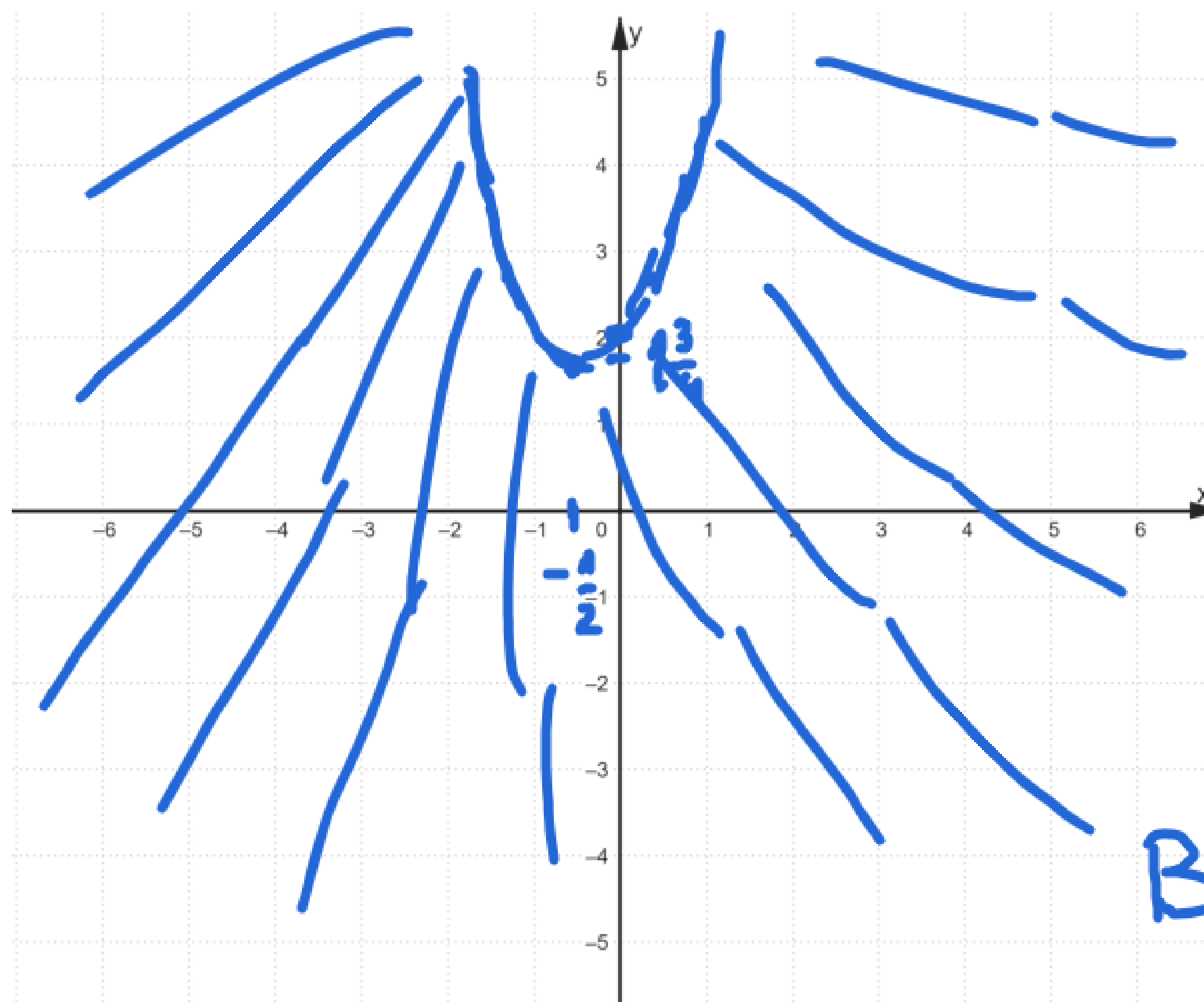
$$(b) B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - 2 \leq x^2 + x\}$$

$$y \leq x^2 + x + 2$$

$$y = x^2 + x + 2$$

$$y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 2$$

$$y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1\frac{3}{4}$$

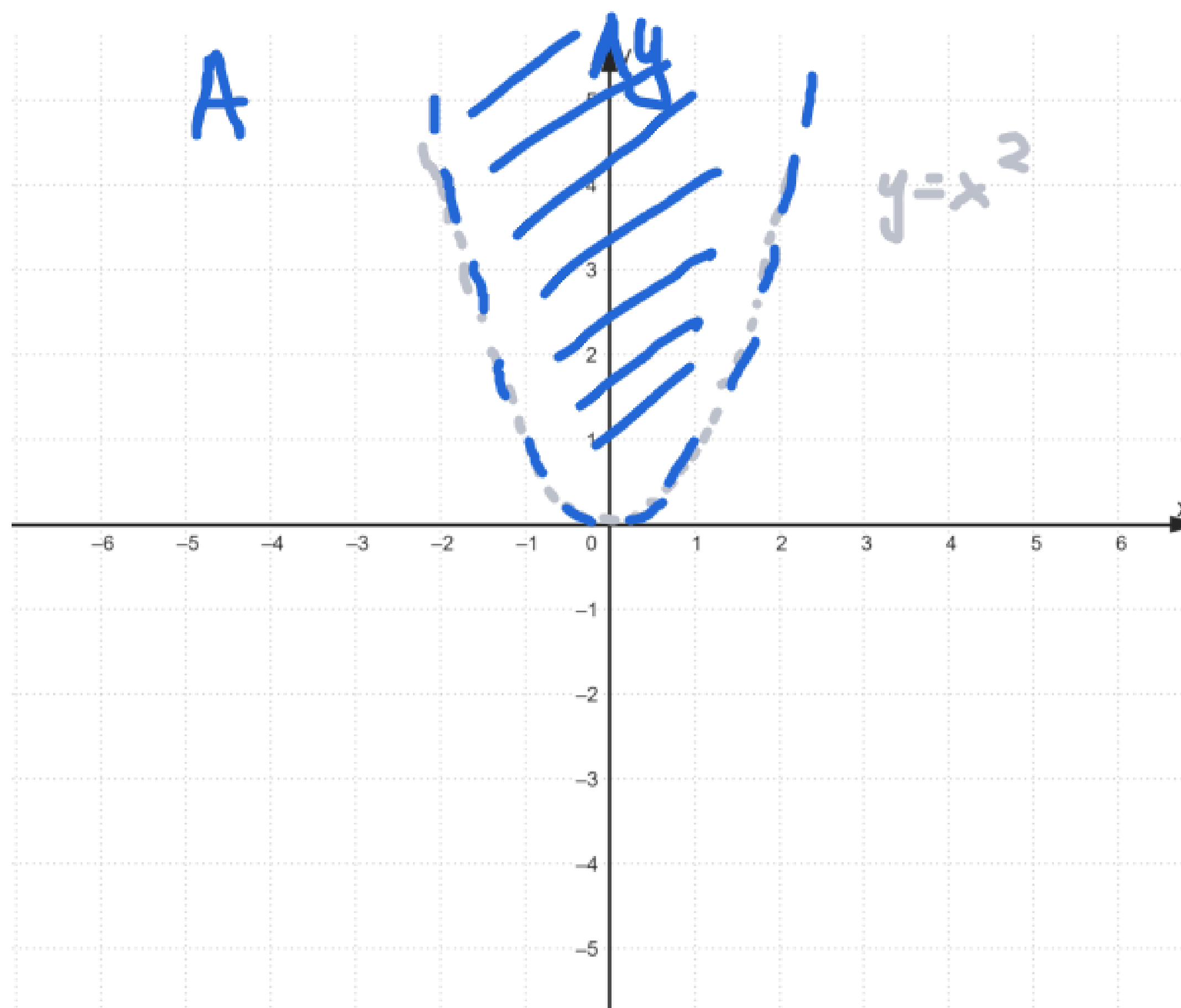


Funkcja kwadratowa cd

2. Naskicuj zbiory:

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$

$$y = x^2$$

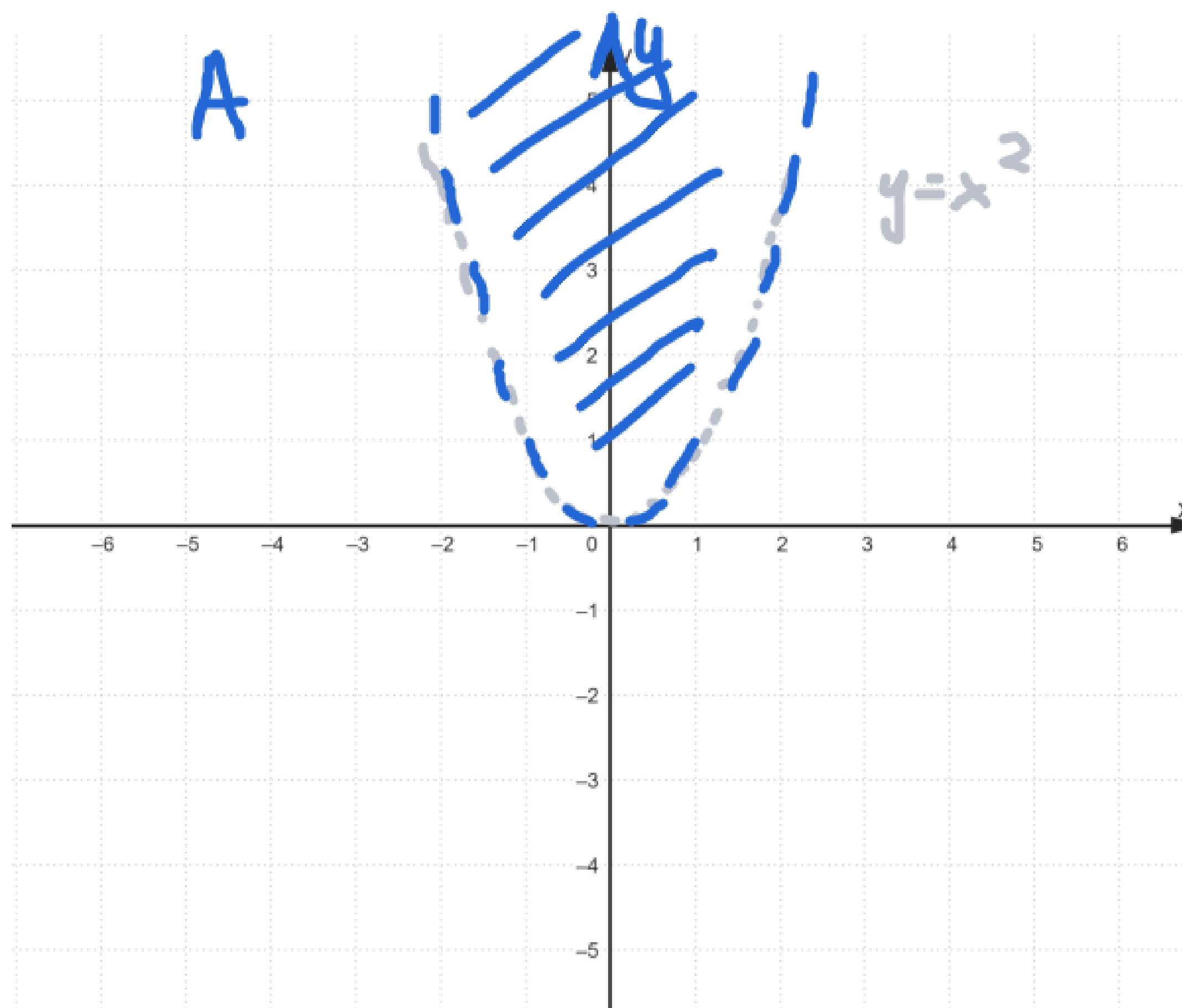


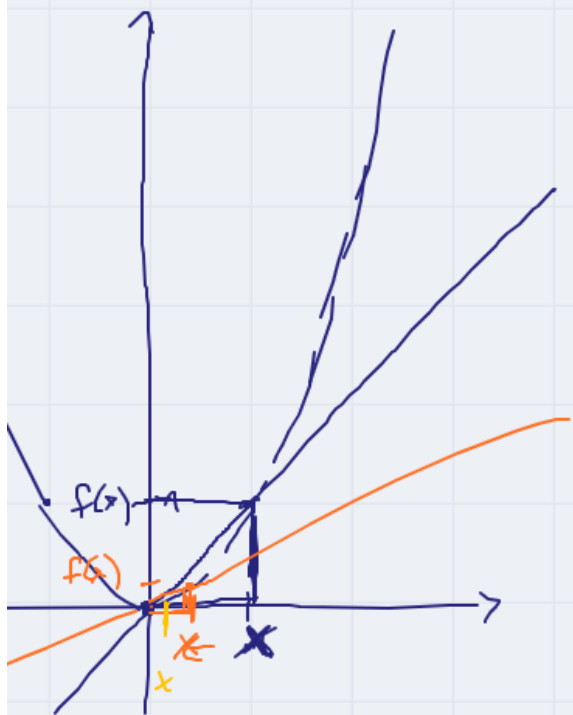
Funkcja kwadratowa cd

2. Naskicuj zbiory:

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$

$$y = x^2$$





$$f(x) = x^2$$

$$f'(0) = 0$$

$$f'(1) = \dots$$

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2x$$



$$f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\text{ilowar rólucióny} = 1$$

$$\text{ilowar rólucióny} = \frac{1}{2}$$

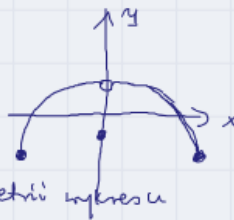
$$\text{ilowar rólucióny} = \frac{1}{5}$$

$$f: X \rightarrow Y \text{ - parzysta, gdy}$$

$$\forall x \in X \quad f(-x) = f(x)$$

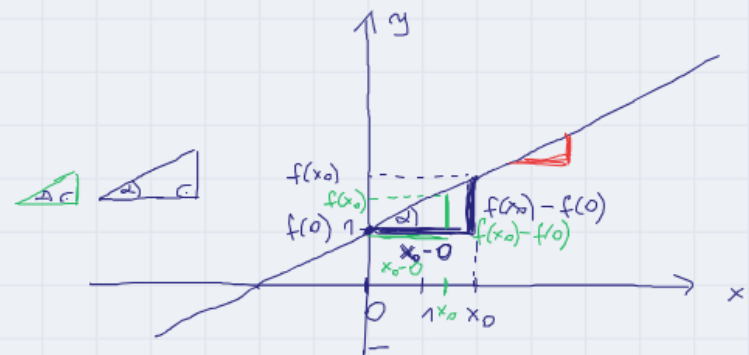
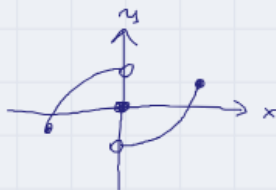
$$\partial_x \partial_y$$

jest oś symetrii wykresu



$f: X \rightarrow Y$ - nieparzysta, gdy

$$\forall x \in X \quad -x \in X \quad \wedge \quad f(-x) = -f(x)$$



ilovaz rdincomy

$$\frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = \tan \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = \tan \alpha = \frac{1}{2}$$

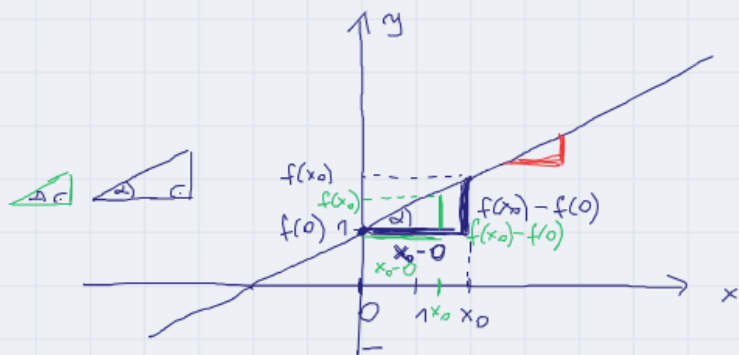
$$f'(0) = \lim_{x_0 \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = \frac{1}{2}$$

$$f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x$$

$$y = \frac{1}{2}x -$$





$$f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$$

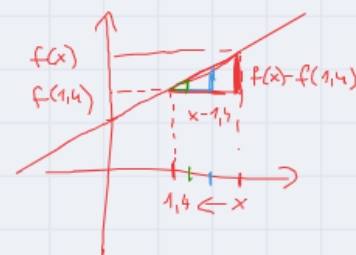
$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

ilora2 rdiniomy

$$\frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$$

$$f'(0) = \lim_{x_0 \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = \frac{1}{2}$$



$$\lim_{x \rightarrow 1.4} \frac{f(x) - f(1.4)}{x - 1.4} = \frac{1}{2} = f'(1.4)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$$

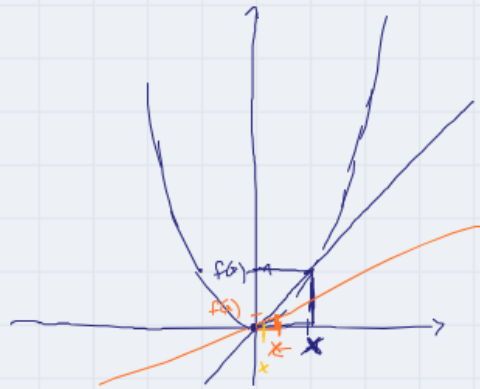
$$f'(x) = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = ax + b$$

$$f'(x) = a$$

$$f(x) = a \cdot x + b$$

$$f'(x) = a$$



$$f(x) = x^2$$

$$f'(0) = 0$$

$$f'(1) = \dots$$

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\text{steigung} = 1$$

$$\text{steigung} = \frac{1}{2}$$

$$\text{steigung} = \frac{1}{3}$$

$$0$$