Reszta z dzielenia wielomianu przez wielomian

Twierdzenie Bèzout

Znajdowanie pierwiastków całkowitych

Równania wielomianowe

Nierówności wielomianowe

Tw. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x-a)$ jest równa liczbie $W(a)$.

Zadanie Wielomian $W(x)$ dzieli się przez dwumiany $(x-1), (x-2), (x-3)$, dając odpowiednio reszty równe $1, 2, 3$. Wyznacz resztę z dzielenia $W(x)$ przez iloczyn $(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)$.

Rozwiązanie

Gdy $W(x):(x-1)$, otrzymamy resztę $r=1$. Oznacza to, że $W(1)=1$.
Gdy $W(x):(x-2)$, otrzymamy resztę $r=2$. Oznacza to, że $W(2)=2$.
Gdy $W(x):(x-3)$, otrzymamy resztę $r=3$. Oznacza to, że $W(3)=3$.

Gdy $W(x):[(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)]$, to reszta będzie wielomianem o jeden stopień niższym niż wielomian, przez który dzielimy.
U nas reszta z dzielenia ma postać:

$$r = ax^2+bx+c$$

Mamy zatem:

$$\begin{cases} 1a+1b+1c=1, & \text{gdy } x=1 \\ 4a+2b+1c=2, & \text{gdy } x=2 \\ 9a+3b+1c=3 & \text{gdy } x=3 \end{cases}$$

Budujemy wyznacznik główny:

$$W=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (1\cdot2\cdot1+4\cdot3\cdot1+9\cdot1\cdot1)-(1\cdot2\cdot9+1\cdot3\cdot1+1\cdot1\cdot4)=$$
$$=(2+12+9)-(18+3+4)=23-25=-2$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{matrix}$$

Metoda Sarrusa

$W=-2$ (to musi być różne od zera)

$$W_a=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (2+6+3)-(6+3+2)=11-11=0$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{matrix}$$

$$a=\frac{W_a}{W}=\frac{0}{-2}=0$$

$$W_b=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{Taki sam jak } W}{=\!=\!=} -2 \qquad b=\frac{W_b}{W}=\frac{-2}{-2}=1$$

$$W_c=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 9 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (6+12+18)-(18+6+12)=0$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{matrix}$$

$$c=\frac{W_c}{W}=\frac{0}{-2}=0$$

$$\begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=0 \end{cases} \qquad r=ax^2+bx+c \text{ - reszta}$$

Odp.: $r=x$

Tw. Bèzout
Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian ten dzieli się bez reszty przez dwumian $(x-a)$.

Tw. Jeżeli współczynniki wielomianu

$$a_n\cdot x^n + a_{n-1}\cdot x^{n-1} + \ldots + a_1\cdot x^1 + a_0\cdot x^0$$

są liczbami całkowitymi i $a_0 \neq 0$ oraz wielomian ma pierwiastek całkowity p, to p jest dzielnikiem a_0.

Twierdzenie to oznacza, że pierwiastków całkowitych wielomianu szukamy wśród dzielników wyrazu wolnego.

Zadanie Znajdź pierwiastki całkowite wielomianu:

a) $W(x)=x^3+2x^2-5x\underbrace{-6}_{\text{wyraz wolny}}$

Szukamy pierwiastków całkowitych wśród dzielników wyrazu wolnego:
$\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$

$W(-1)=(-1)^3+2\cdot(-1)^2-5\cdot(-1)-6=-1+2+5-6=0$

$x=-1$ - pierwiastek wielomianu

Z tw. Bèzout wiemy, że wielomian $W(x)$ dzieli się bez reszty przez dwumian: $(x+1)$.

$$\begin{array}{l} x^2+x-6 \\ \hline (x^3+2x^2-5x-6):(x+1) \\ -(x^3+x^2) \\ \hline = \quad x^2-5x-6 \\ \quad -(x^2+x) \\ \hline \quad = \quad -6x-6 \\ \qquad -(-6x-6) \\ \hline \qquad = \quad = \end{array}$$

$W(x)=(x^2+x-6)\cdot(x+1)$

Szukając kolejnych pierwiastków wielomianu, rozwiążemy równanie:

$$(x^2+x-6)\cdot(x+1)=0$$

$x^2+x-6=0 \quad \vee \quad x+1=0$
$\Delta=1+24=25 \qquad\qquad \underline{x=-1}$
$\sqrt{\Delta}=5$
$x=\frac{-1-5}{2}=\frac{-6}{2}=-3$
$x=\frac{-1+5}{2}=\frac{4}{2}=2$

Odp.: $x\in\{-1,-3,2\}$

Zadanie Rozwiąż równanie

a) $x^3+2x^2-3x-10=0$

Oznaczmy przez $W(x)=x^3+2x^2-3x-10$.
Znajdziemy pierwiastki całkowite tego wielomianu, szukając ich wśród liczb: $\pm1, \pm2, \pm5, \pm10$.

$W(2)=2^3+2\cdot2^2-3\cdot2-10=8+8-6-10=0$

$x=2$ - pierwiastek

Z tw. Bèzout:

$$\begin{array}{l} x^2+4x+5 \\ \hline (x^3+2x^2-3x-10):(x-2) \\ -(x^3-2x^2) \\ \hline = \quad 4x^2-3x-10 \\ \quad -(4x^2-8x) \\ \hline \quad = \quad 5x-10 \\ \qquad -(5x-10) \\ \hline \qquad = \quad = \end{array}$$

$W(x)=(x^2+4x+5)\cdot(x-2)$

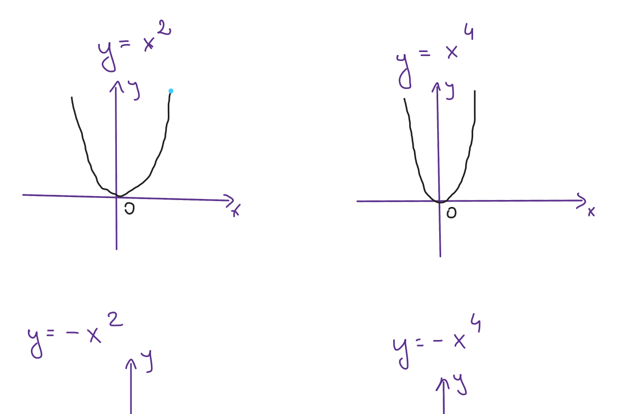
Stąd mamy do rozwiązania takie równanie:

$$(x^2+4x+5)\cdot(x-2)=0$$

$x^2+4x+5=0 \quad \vee \quad x-2=0$
$\Delta=16-20 \qquad\qquad \underline{x=2}$
$\Delta=-4<0$
Brak rozw.

Odp.: $x\in\{2\}$

Przypomnienie



Przykład Rozwiążemy nierówność:

a) $(x-1)^2\cdot(2-x)\cdot x^4\cdot(x-7)\geq 0$

$(x-1)^2=0 \;\vee\; 2-x=0 \;\vee\; x^4=0 \;\vee\; x-7=0$
$x-1=0 \;\vee\; x=2 \;\vee\; \underline{x=0} \;\vee\; x=7$
$\underline{x=1}$

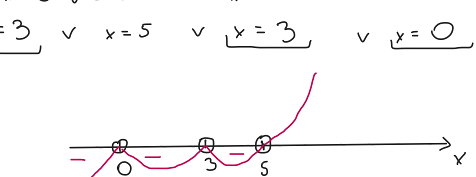
Pierwiastek podwójny

pierwiastek o krotności parzystej

Odp.: $x\in\langle 2,7\rangle\cup\{0,1\}$

b) $(3-x)\cdot(5-x)\cdot(x-3)\cdot x^6<0$

$3-x=0 \;\vee\; 5-x=0 \;\vee\; x-3=0 \;\vee\; x^6=0$
$\underline{x=3} \;\vee\; x=5 \;\vee\; \underline{x=3} \;\vee\; \underline{x=0}$



Odp.: $x\in(-\infty,0)\cup(0,3)\cup(3,5)$