Funkcja wykładnicza cz.2

Zadanie Rozwiąż nierówność:

1) $2^{x-1} \geq 2^5$ $D_N = \mathbb{R}$

z monotoniczności f. wykładniczej

$x-1 \geq 5$ (zachowujemy znak nierówności, bo w podstawie jest liczba 2, która jest większa od liczby 1).

$x \geq 6$

Odp.: $x \in \langle 6, +\infty)$

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-4} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ $D_N = \mathbb{R}$

Z monotoniczności funkcji wykładniczej

$2x-4 \leq x$ (zmieniamy znak nierówności na przeciwny, bo w podstawie potęgi jest liczba $\frac{1}{3}$, która należy do przedziału $(0,1)$).

$2x - x \leq 4$

$x \leq 4$

Odp.: $x \in (-\infty, 4\rangle$

3) $2^{-x} > 4^{x+1}$

$2^{-x} > (2^2)^{x+1}$

$2^{-x} > 2^{2x+2}$

$-x > 2x+2$

$-x-2x > 2$

$-3x > 2 \quad |:(-3)$

$x < -\frac{2}{3}$

Odp.: $x \in (-\infty, -\frac{2}{3})$

4) $3^{2-x} \leq \frac{1}{3}$ $D_N = \mathbb{R}$

$3^{2-x} \leq 3^{-1}$

$2-x \leq -1$

$-x \leq -1-2$

$-x \leq -3 \quad |\cdot(-1)$

$x \geq 3$

Odp.: $x \in \langle 3, +\infty)$

5) $5^{x+1} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} < \left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$ $D_N = \mathbb{R}$

$5^{x+1} \cdot (5^{-1})^{2x+1} < (5^{-1})^{-x}$

$5^{x+1} \cdot 5^{-2x-1} < 5^{x}$

$5^{x+\cancel{1}-2x-\cancel{1}} < 5^{x}$

$5^{-x} < 5^{x}$

$-x < x$

$-x-x < 0$

$-2x < 0 \quad |:(-2)$

$x > 0$

Odp.: $x \in (0, +\infty)$

6) $2^{2x-1} - 4^{x} \geq -\frac{1}{8}$ $D_N = \mathbb{R}$

$2^{2x} \cdot 2^{-1} - (2^2)^x \geq -(2^{-3})$

$2^{2x} \cdot \frac{1}{2} - 2^{2x} \geq -(2^{-3})$

$\frac{1}{2} \cdot 2^{2x} - 2^{2x} \geq -(2^{-3})$

$2^{2x} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) \geq -(2^{-3})$

$2^{2x} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \geq -(2^{-3})$

$-\frac{1}{2} \cdot 2^{2x} \geq -(2^{-3}) \quad |\cdot(-1)$

$\frac{1}{2} \cdot 2^{2x} \leq 2^{-3}$

$2^{-1} \cdot 2^{2x} \leq 2^{-3}$

$2^{-1+2x} \leq 2^{-3}$

$-1+2x \leq -3$

$2x \leq -3+1$

$2x \leq -2 \quad |:2$

$x \leq -1$

Odp.: $x \in (-\infty, -1\rangle$

7) $16^x - 5 \cdot 4^x + 4 \geq 0$ $D_N = \mathbb{R}$

$(4^2)^x - 5 \cdot 4^x + 4 \geq 0$

$(4^x)^2 - 5 \cdot 4^x + 4 \geq 0$

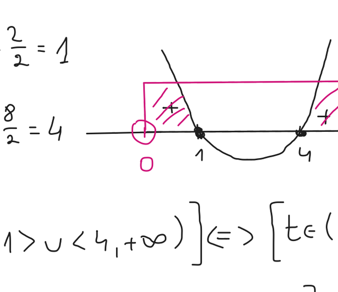
$t = 4^x$, $t > 0$

$t^2 - 5t + 4 \geq 0$

$\Delta = 25 - 16 = 9$, $\sqrt{\Delta} = 3$

$t_1 = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$t_2 = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4$



$[t \in (0,1\rangle \cup \langle 4, +\infty)] \Leftrightarrow [t \in (0,1\rangle \vee t \in \langle 4, +\infty)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [(t > 0 \wedge t \leq 1) \vee t \geq 4]$

$t > 0 \wedge t \leq 1 \quad \vee \quad t \geq 4$

$4^x > 0 \wedge 4^x \leq 1 \quad \vee \quad 4^x \geq 4^1$

$x \in \mathbb{R} \wedge 4^x \leq 4^0 \quad \vee \quad x \geq 1$

$x \in \mathbb{R} \wedge x \leq 0 \quad \vee \quad x \in \langle 1, +\infty)$

$x \in (-\infty, 0\rangle$

Otrzymaliśmy, że $x \in (-\infty, 0\rangle \vee x \in \langle 1, +\infty)$

Odp.: $16^x - 5 \cdot 4^x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 1, +\infty)$

8) $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 > 0$ $D_N = \mathbb{R}$

$(2^2)^x - 3 \cdot 2^x - 4 > 0$

$(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x - 4 > 0$

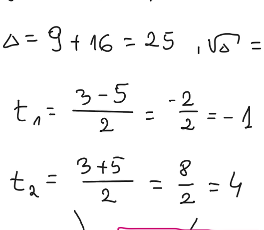
$t = 2^x$, $t > 0$

$t^2 - 3t - 4 > 0$

$\Delta = 9 + 16 = 25$, $\sqrt{\Delta} = 5$

$t_1 = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

$t_2 = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4$



$t \in (4, +\infty) \Leftrightarrow t > 4$

$2^x > 2^2$

$x > 2$

Odp.: $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 > 0 \Leftrightarrow x \in (2, +\infty)$

9) $\frac{2^x}{2^x - 1} \leq \frac{1}{2^x}$ $D_N: \begin{cases} 2^x - 1 \neq 0 \\ 2^x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \neq 1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \neq 2^0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$t = 2^x$, $t > 0$

$\frac{t}{t-1} \leq \frac{1}{t}$

$\frac{t}{t-1} - \frac{1}{t} \leq 0$

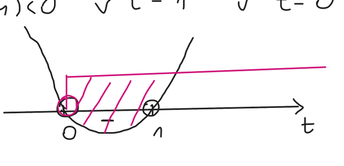
$\frac{t^2 - 1 \cdot (t-1)}{(t-1) \cdot t} \leq 0$

$\frac{t^2 - t + 1}{(t-1) \cdot t} \leq 0$ $t \neq 0 \wedge t \neq 1$

$(t^2 - t + 1) \cdot (t-1) \cdot t \leq 0$ $(+t^4)$

$t^2 - t + 1 = 0 \vee t - 1 = 0 \vee t = 0$

$\Delta = (1-4) < 0 \vee t = 1 \vee t = 0$



$t \in (0, 1) \Leftrightarrow t > 0 \wedge t < 1$

$2^x > 0 \wedge 2^x < 1$

$x \in \mathbb{R} \wedge 2^x < 2^0$

$x \in \mathbb{R} \wedge x < 0$

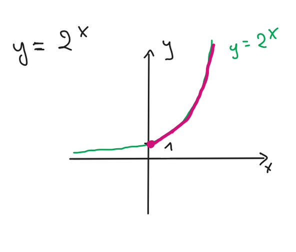
Odp.: $\frac{2^x}{2^x - 1} \leq \frac{1}{2^x} \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0)$

Zadanie Naszkicuj wykres funkcji f, jeśli

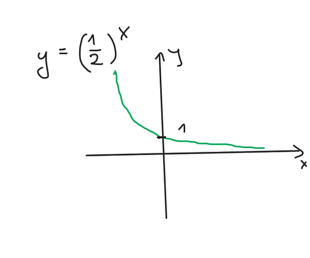
a) $f(x) = 2^{|x|}$

Rozwiązanie Przypomnienie:

$y = 2^x$



$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



$y = 2^{|x|}$

1) $x \geq 0$

$y = 2^x$ dla $x \geq 0$

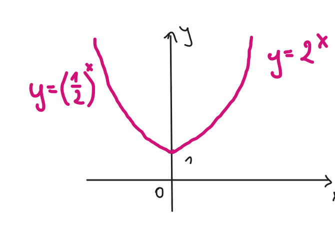
2) $x < 0$

$y = 2^{-x}$

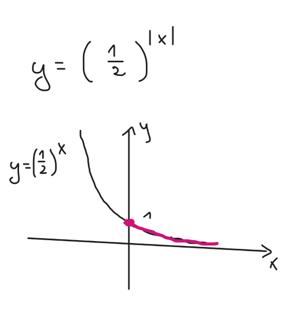
$y = \frac{1}{2^x}$

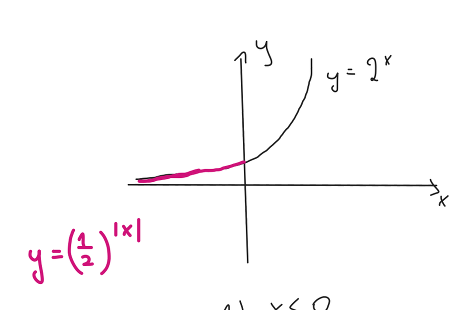
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ dla $x < 0$

Rysujemy wykres funkcji $y = 2^{|x|}$



b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$





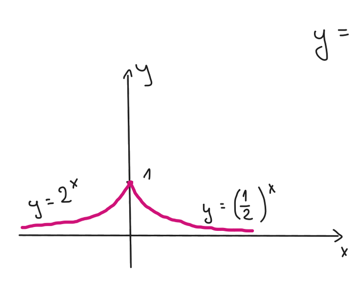
1) $x \geq 0$

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ dla $x \geq 0$

1) $x < 0$

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$

$y = 2^x$ dla $x < 0$



Do domu Rozwiąż nierówność

a) $2^x = 5$

b) $7^x = 8$

c) $3^x = 4$