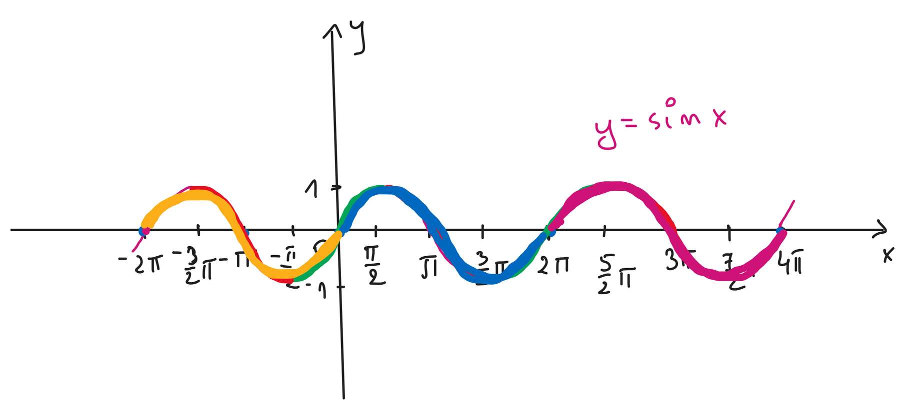
Funkcje trygonometryczne

Wykresy funkcji trygonometrycznych

① $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \langle -1, 1 \rangle$



Własności funkcji $y = \sin x$:

1) Miejsce zerowe : $x_0 = 0 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (zbiór liczb całkowitych)

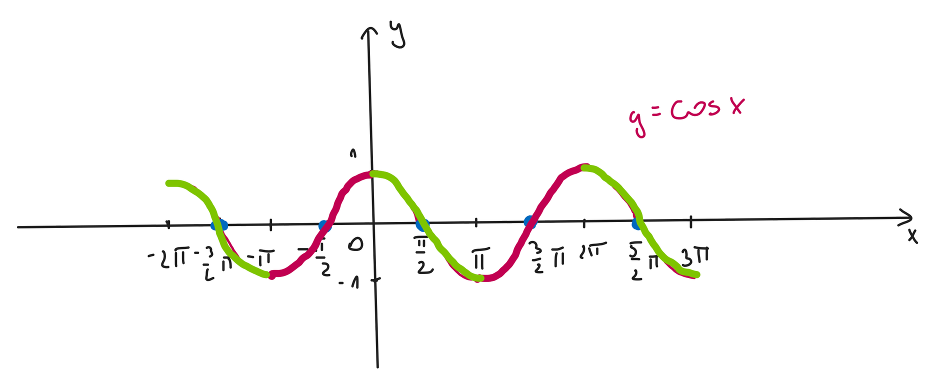
2) Funkcja $y = \sin x$ jest rosnąca dla $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

3) Funkcja $y = \sin x$ jest malejąca dla $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

4) $T = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ jest okresem funkcji $y = \sin x$.

5) Funkcja $\sin x$ jest funkcją nieparzystą , tzn. $\sin(-x) = -\sin x$.

② $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \langle -1, 1 \rangle$



Własności funkcji $y = \cos x$:

1) Miejsce zerowe : $x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

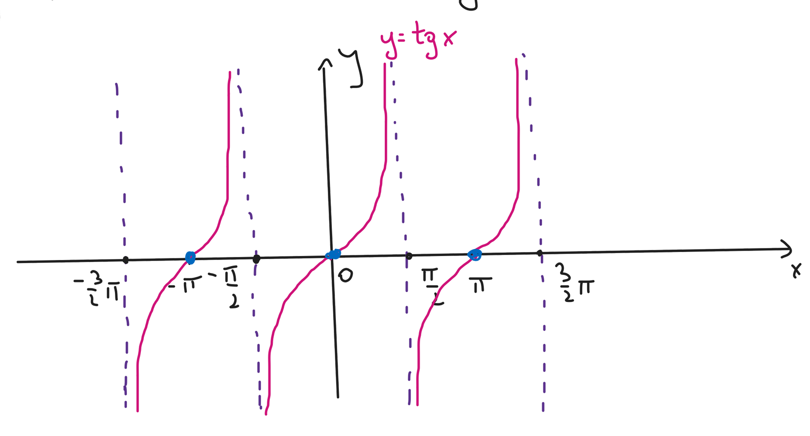
2) Funkcja $\cos x$ jest rosnąca dla $x \in (-\pi, 0) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

3) Funkcja ta jest malejąca dla $x \in (0, \pi) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

4) $T = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

5) Funkcja $\cos x$ jest funkcją parzystą , tzn. $\cos(-x) = \cos x$.

③ $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$, $y \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$



Własności funkcji $y = \operatorname{tg} x$:

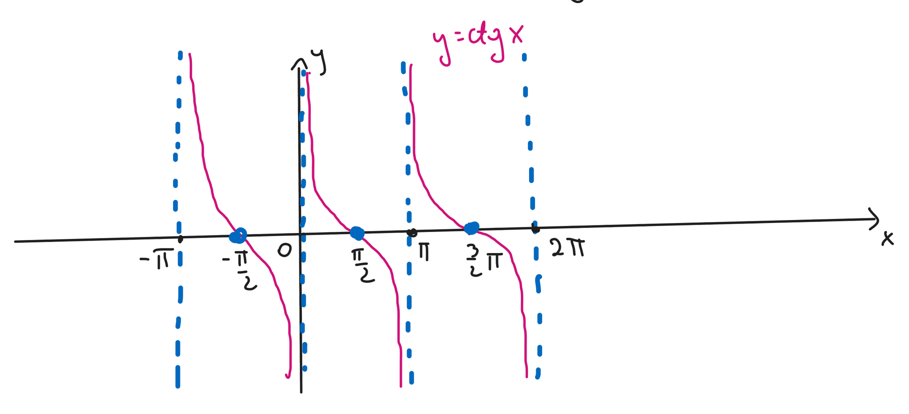
1) Miejsce zerowe : $x_0 = 0 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

2) Funkcja jest rosnąca dla $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

3) $T = k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$

4) Funkcja $\operatorname{tg} x$ jest funkcją nieparzystą , tzn. $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.

④ $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0 + k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$ $y \in \mathbb{R}$



Własności funkcji $\operatorname{ctg} x$:

1) Miejsce zerowe : $x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

2) Funkcja $\operatorname{ctg} x$ jest malejąca w każdym przedziale $(0 + k\pi, \pi + k\pi)$.

3) $T = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

4) Funkcja $\operatorname{ctg} x$ jest nieparzysta , tzn. $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$.

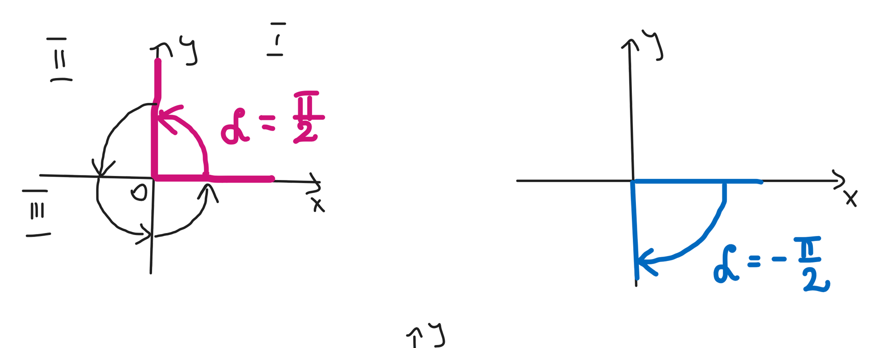
Uwaga!
$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(-x) = \cos x$
$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$
$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$

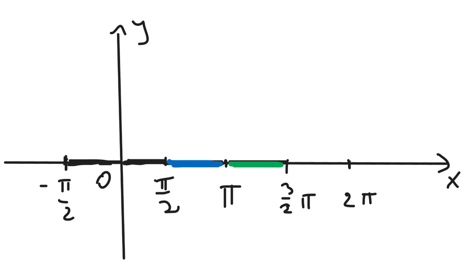
Przypomnienie :
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$
$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$
$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

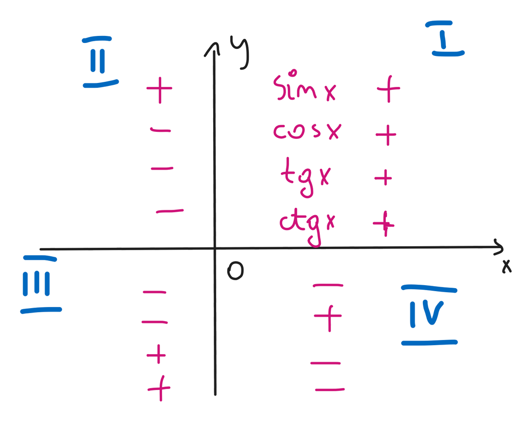
Tabelka z podstawowymi wartościami funkcji trygonometrycznych:

funkcja \ x	$0° = 0$	$30° = \frac{\pi}{6}$	$45° = \frac{\pi}{4}$	$60° = \frac{\pi}{3}$	$90° = \frac{\pi}{2}$	$180° = \pi$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0
$\operatorname{ctg} x$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	

Wzory redukcyjne





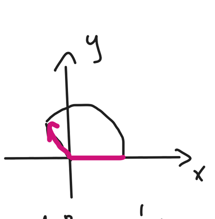


Przykład

1) $\sin 120° = \sin(1 \cdot 90° + 30°) = \begin{Bmatrix} \sin x \to \cos x \\ \cos x \to \sin x \\ \operatorname{tg} x \to \operatorname{ctg} x \\ \operatorname{ctg} x \to \operatorname{tg} x \end{Bmatrix} =$

nieparzysta krotność 90°

$= +\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$



lub można tak policzyć:

$\sin 120° = \sin(2 \cdot 90° - 60°) = +\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

parzysta krotność 90°