Wzory redukcyjne

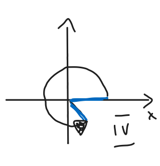
Równania trygonometryczne

Nierówności trygonometryczne

Przykład $\alpha = 300^\circ$

$\sin 300^\circ = \sin(3\cdot 90^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

nieparzysta krotność 90°



$\cos 300^\circ = \cos(3\cdot 90^\circ + 30^\circ) = +\sin 30^\circ = +\frac{1}{2}$

$\operatorname{tg} 300^\circ = \operatorname{tg}(3\cdot 90^\circ + 30^\circ) = -\operatorname{ctg} 30^\circ = -\sqrt{3}$

Dygresje:

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}} = \sqrt{3}$

$\operatorname{ctg} 300^\circ = \operatorname{ctg}(3\cdot 90^\circ + 30^\circ) = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

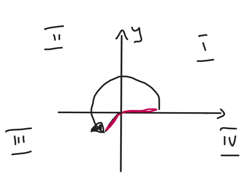
Przykład $\alpha = 225^\circ$

$225^\circ = 2\cdot 90^\circ + 45^\circ$

$225^\circ = 3\cdot 90^\circ - 45^\circ$

$\sin 225^\circ = \sin(2\cdot 90^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

parzysta krotność 90°



$\cos 225^\circ = \cos(2\cdot 90^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\operatorname{tg} 225^\circ = \operatorname{tg}(2\cdot 90^\circ + 45^\circ) = +\operatorname{tg} 45^\circ = 1$

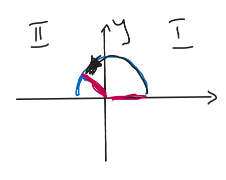
$\operatorname{ctg} 225^\circ = \operatorname{ctg}(2\cdot 90^\circ + 45^\circ) = +\operatorname{ctg} 45^\circ = 1$

Przykład $\alpha = 150^\circ$

$150^\circ = 1\cdot 90^\circ + 60^\circ$

$150^\circ = 2\cdot 90^\circ - 30^\circ$

$\sin 150^\circ = \sin(2\cdot 90^\circ - 30^\circ) = +\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$



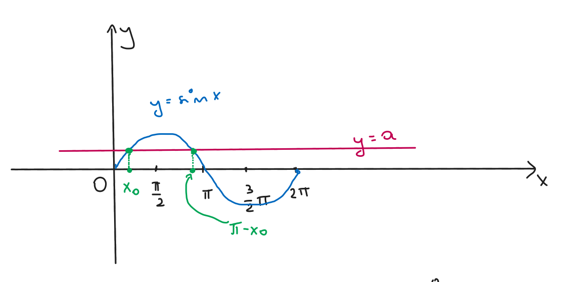
$\cos 150^\circ = \cos(2\cdot 90^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{tg} 150^\circ = \operatorname{tg}(2\cdot 90^\circ - 30^\circ) = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\operatorname{ctg} 150^\circ = \operatorname{ctg}(2\cdot 90^\circ - 30^\circ) = -\operatorname{ctg} 30^\circ = -\sqrt{3}$

Równania trygonometryczne

(1) $\sin x = a$, $a \in \langle -1, 1\rangle$, $x \in \mathbb{R}$



x_0 - z tabeli, spełnia równanie $\sin x_0 = a$

Równanie ma dwie serie rozwiązań:

$x_1 = x_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = \pi - x_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Przykład Rozwiąż równanie:

1) $\sin x = \frac{1}{2}$

$x_0 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$

$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Odp.: Istnieją dwie serie rozwiązań równania $\sin x = \frac{1}{2}$:

$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

2) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x_0 = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$

$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Odp.:

$x_2 = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

3) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin(-x_0) = -\sin x_0$

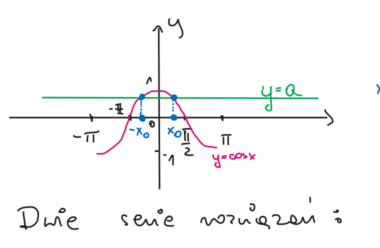
$x_0 = -60^\circ = -\frac{\pi}{3}$, bo $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3}$

$x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Odp.:

$x_2 = \pi - (-\frac{\pi}{3}) + 2k\pi = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

(2) $\cos x = a$, $a \in \langle -1, 1\rangle$, $x \in \mathbb{R}$



x_0 - z tabeli takie, że $\cos x_0 = a$

Dwie serie rozwiązań:

$x_1 = x_0 + 2k\pi$

$x_2 = -x_0 + 2k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

Przykład 1) $\cos x = \frac{1}{2}$

$x_0 = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$

Istnieją dwie serie rozwiązań:

$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

2) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x_0 = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$

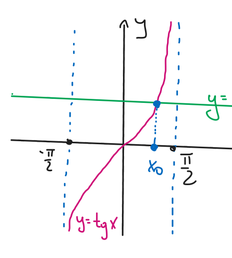
Dwie serie rozwiązań istnieją:

$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

(3) $\operatorname{tg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$



x_0 - z tabeli takie, że $\operatorname{tg} x_0 = a$.

Jest jedna seria rozwiązań:

$x_1 = x_0 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Przykład a) $\operatorname{tg} x = 1$

$x_0 = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$

Jedna seria rozwiązań istnieje:

$x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

b) $\operatorname{tg} x = -1$

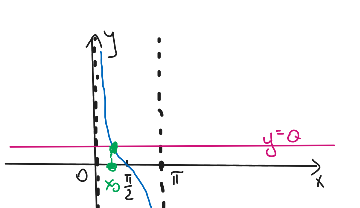
$\operatorname{tg}(-x_0) = -\operatorname{tg} x_0$

$x_0 = -45^\circ = -\frac{\pi}{4}$

Jedna seria rozwiązań:

$x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

(4) $\operatorname{ctg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0 + k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$



x_0 - z tabeli jest takie, że spełnia równanie $\operatorname{ctg} x_0 = a$.

Jedna seria rozwiązań istnieje:

$x_1 = x_0 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Przykład a) $\operatorname{ctg} x = 1$

$x_0 = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$

$x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

b) $\operatorname{ctg} x = -1$

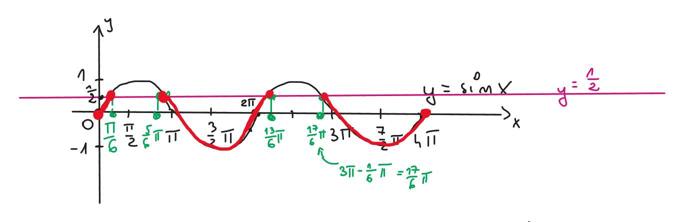
$\operatorname{ctg}(-x_0) = -\operatorname{ctg} x_0$

$x_0 = -\frac{\pi}{4}$

odp.: $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Zadanie Rozwiąż nierówność:

a) $\sin x \leq \frac{1}{2}$ dla $x \in \langle 0, 4\pi \rangle$



Równanie pomocnicze: $\sin x = \frac{1}{2}$.

$x_0 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$

Odp.: $x \in \langle 0, \frac{\pi}{6} \rangle \cup \langle \frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi \rangle \cup \langle \frac{17}{6}\pi, 4\pi \rangle$

b) $\sin x > \frac{1}{2}$ dla $x \in \langle 0, 4\pi$

odp.: $x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi) \cup (\frac{13}{6}, \frac{17}{6}\pi)$