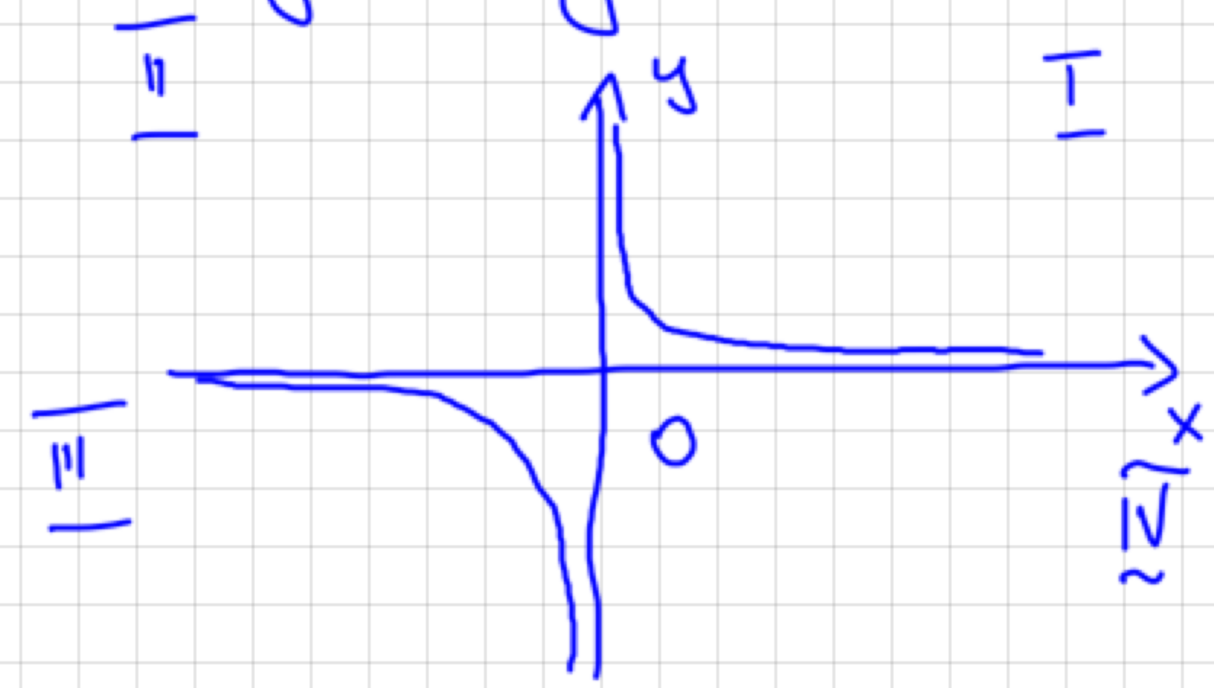
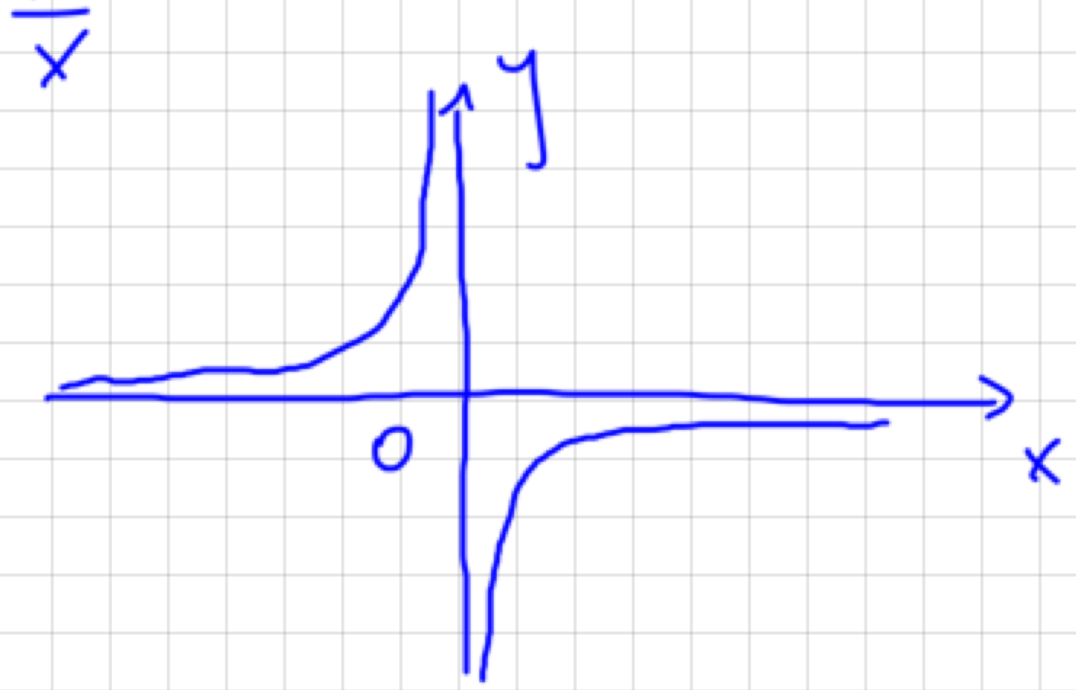
Funkcja wymierna

Funkcja wymierna to taka funkcja, która jest ilorazem dwóch wielomianów.

Rozpatrzmy wykres funkcji $y = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.



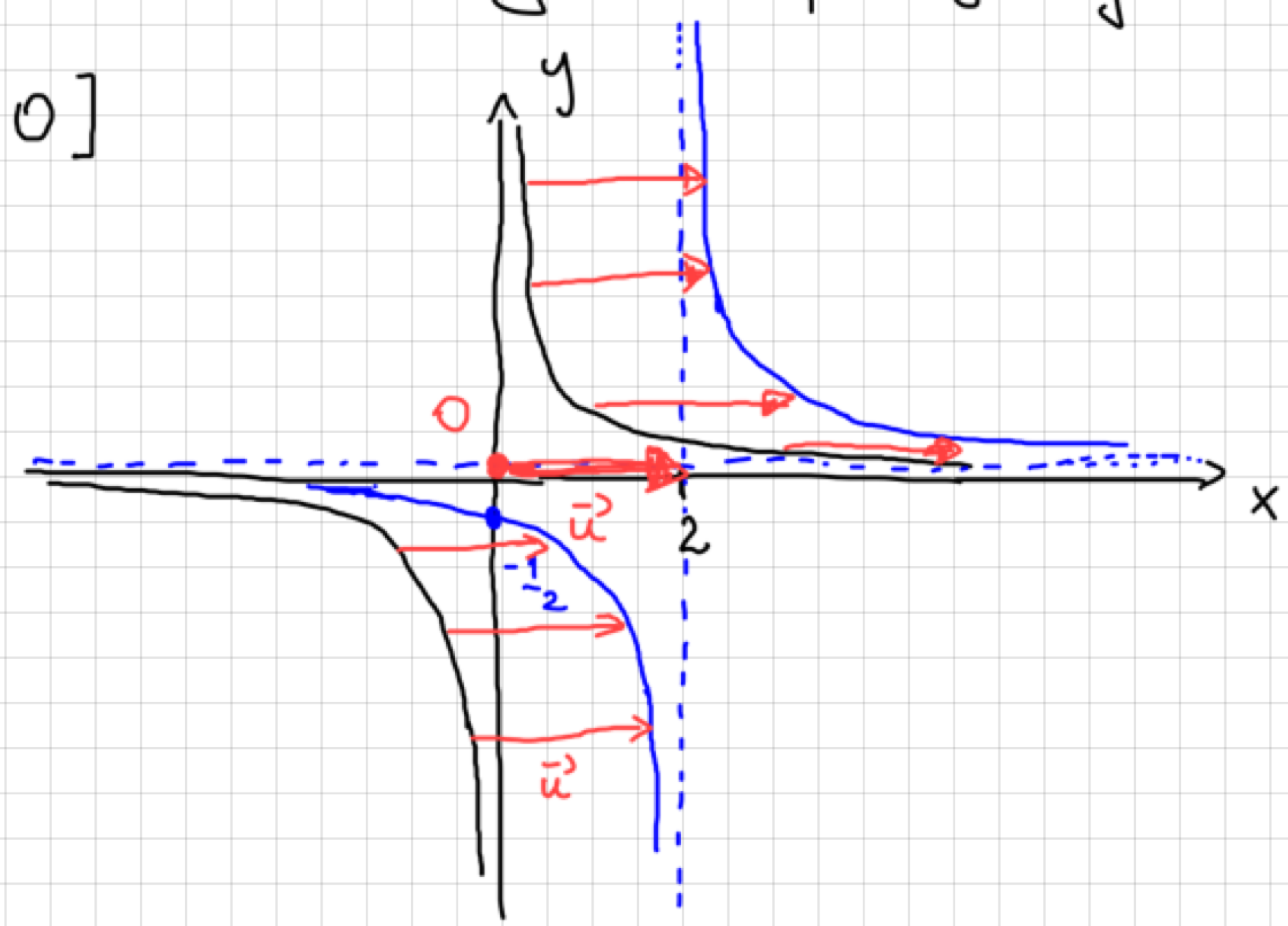
$y = -\frac{1}{x}$



Przykład Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x-2}$, $x \neq 2$

dostajemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \frac{1}{x}$

o wektor $\vec{u} = [2, 0]$



dla $x = 0$ mamy $y = -\frac{1}{2}$

Definicja Funkcję postaci: $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $c \neq 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$

nazywamy funkcją homograficzną.

Przykład Naszkicujemy wykres funkcji $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

Przekształcimy wzór funkcji:

$$\frac{x-2}{x-3} = \frac{(x-3)+1}{x-3} = \frac{x-3}{x-3} + \frac{1}{x-3} = 1 + \frac{1}{x-3}$$

$$f(x) = \frac{1}{x-3} + 1$$

Wykres powyższej funkcji otrzymamy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \frac{1}{x}$ o wektor $\vec{u} = [3, 1]$.

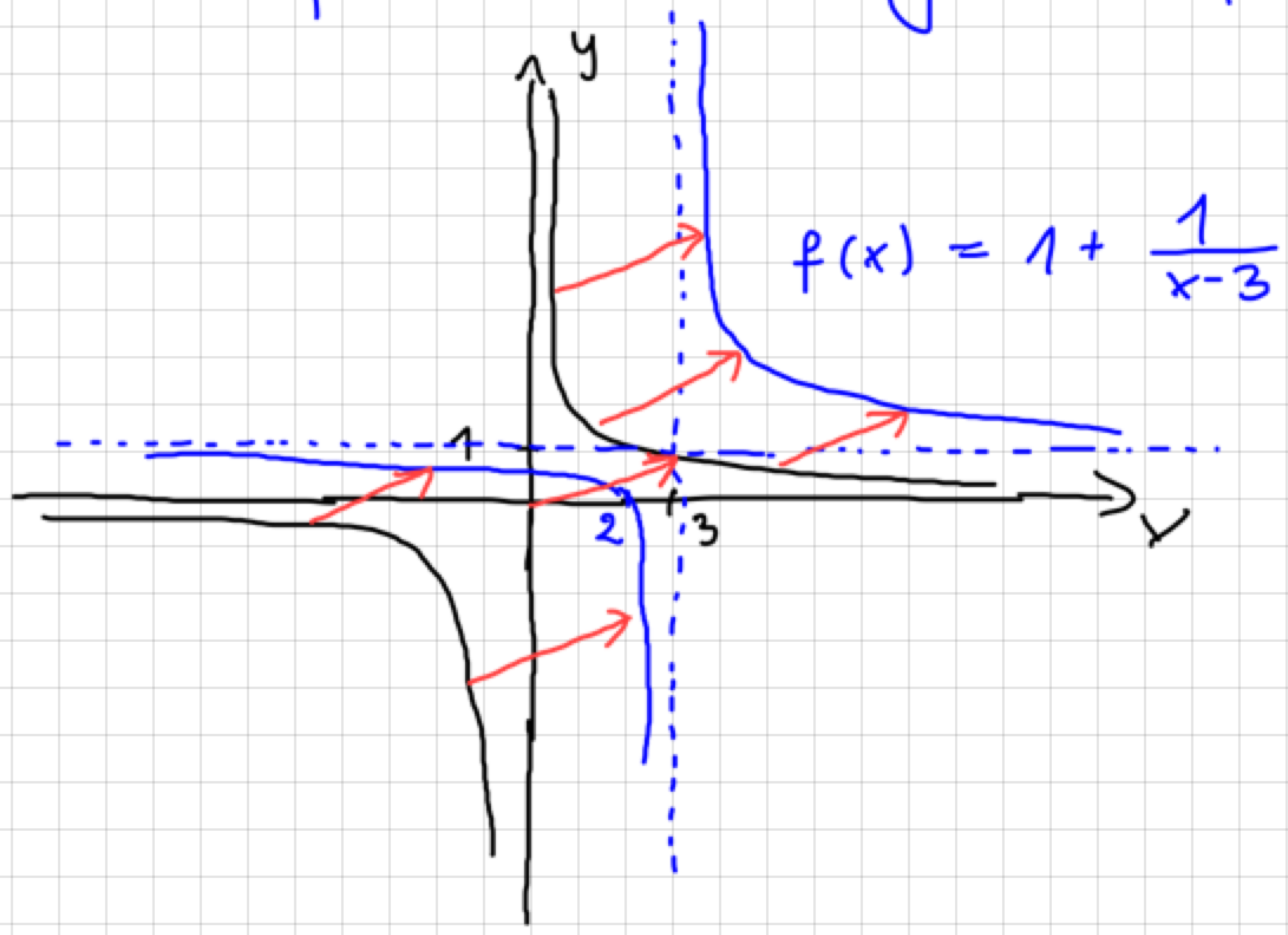
M_z: $\frac{1}{x-3} + 1 = 0$

$\frac{1}{x-3} = -1 \quad | \cdot (x-3)$

$1 = -x + 3$

$\underline{x = 2}$

$f(0) = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$



Zadanie Rozwiąż równanie:

a) $\frac{3}{x-2} = x+2 \quad /\cdot(x-2)$ $\qquad D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$3 = (x+2)\cdot(x-2)$

$3 = x^2 - 4$

$x^2 - 4 - 3 = 0$

$x^2 - 7 = 0$

$x^2 = 7$

$\underline{x = \sqrt{7} \in D} \quad \vee \quad \underline{x = -\sqrt{7} \in D}$

b) $\frac{1-x}{x} - \frac{x+2}{x+3} = -2$ $\qquad D = \mathbb{R} \setminus \{0, -3\}$

$\frac{(1-x)\cdot(x+3) - (x+2)\cdot x}{x\cdot(x+3)} = -2$

$\frac{x+3-x^2-3x-x^2-2x}{x\cdot(x+3)} = -2$

$\frac{-2x^2-4x+3}{x^2+3x} = \frac{-2}{1}$

$(-2x^2-4x+3)\cdot 1 = -2(x^2+3x)$

$\cancel{-2x^2} - 4x + 3 = \cancel{-2x^2} - 6x$

$-4x + 3 = -6x$

$-4x + 6x = -3$

$2x = -3 \quad /:2$

$\underline{x = -\frac{3}{2} \in D}$

c) $\frac{x^2-x-2}{x-1}=0$ $\qquad D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$x^2-x-2=0$

$\Delta=1+8=9, \quad \sqrt{\Delta}=3$

$x_1=\frac{1-3}{2}=\frac{-2}{2}=-1\in D$

$x_2=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2\in D$

Odp.: $x_1=-1$, $x_2=2$

Zadanie Rozwiąż nierówność:

a) $\frac{x-1}{2+x}\geq 0 \ \Big/\cdot(2+x)^2$ $\qquad D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$(x-1)\cdot(2+x)\geq 0$

$x=1 \ \vee \ x=-2$

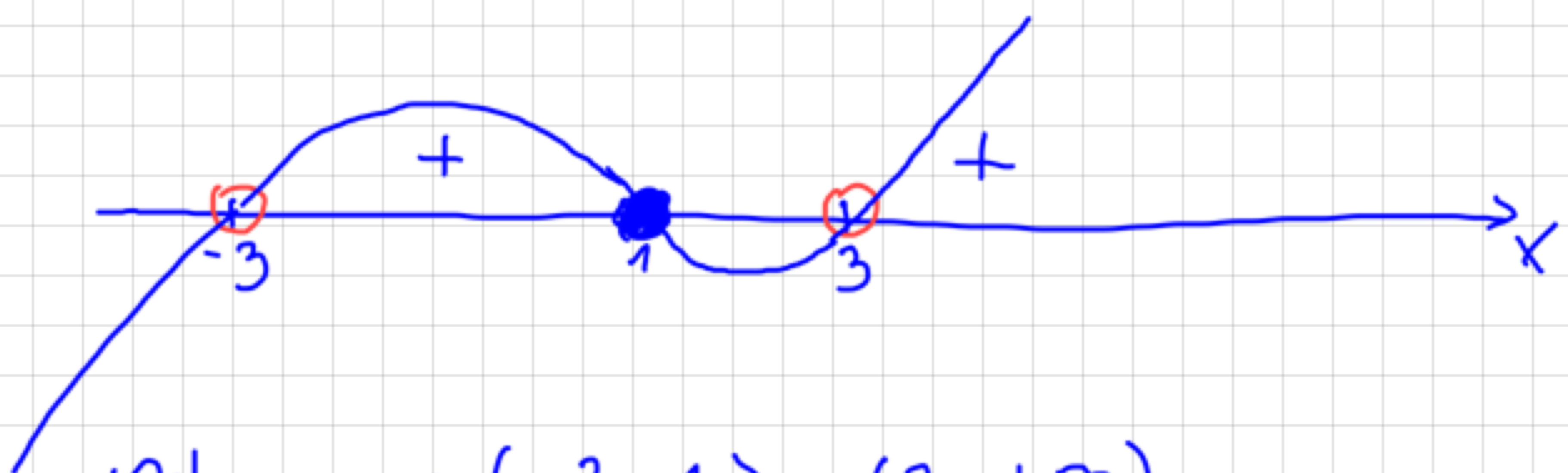
Odp.: $x\in(-\infty,-2)\cup\langle 1,+\infty)$

b) $\dfrac{(x-1)\cdot(x^2+2)}{(x-3)\cdot(x+3)} \geq 0$ $\qquad D = \mathbb{R}\setminus\{3,-3\}$

$(x-1)\cdot(x^2+2)\cdot(x-3)\cdot(x+3) \geq 0$

$x-1=0 \quad \vee \quad x^2+2=0 \quad \vee \quad x-3=0 \quad \vee \quad x+3=0$

$x=1 \qquad$ r. sprzeczne $\qquad x=3 \qquad x=-3$



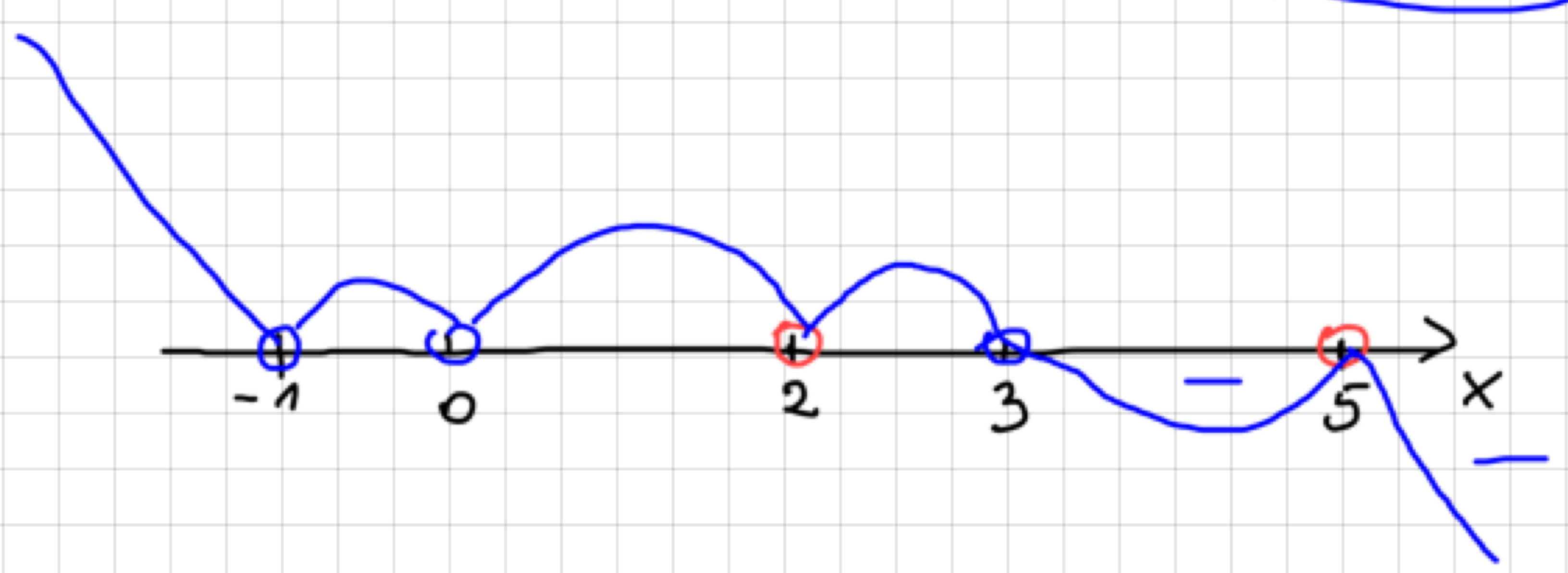
Odp.: $x \in (-3, 1\rangle \cup (3, +\infty)$

c) $\dfrac{(x+1)^2\cdot(x-3)\cdot x^4\cdot(2-x)}{(x-5)^2\cdot(x-2)} < 0$ $\qquad D = \mathbb{R}\setminus\{5,2\}$

$(x+1)^2\cdot(x-3)\cdot x^4\cdot(2-x)\cdot(x-5)^2\cdot(x-2) < 0$

$x=-1 \quad \vee \quad x=3 \quad \vee \quad x=0 \quad \vee \quad x=2 \quad \vee \quad x=5 \quad \vee \quad x=2$

$k=2$



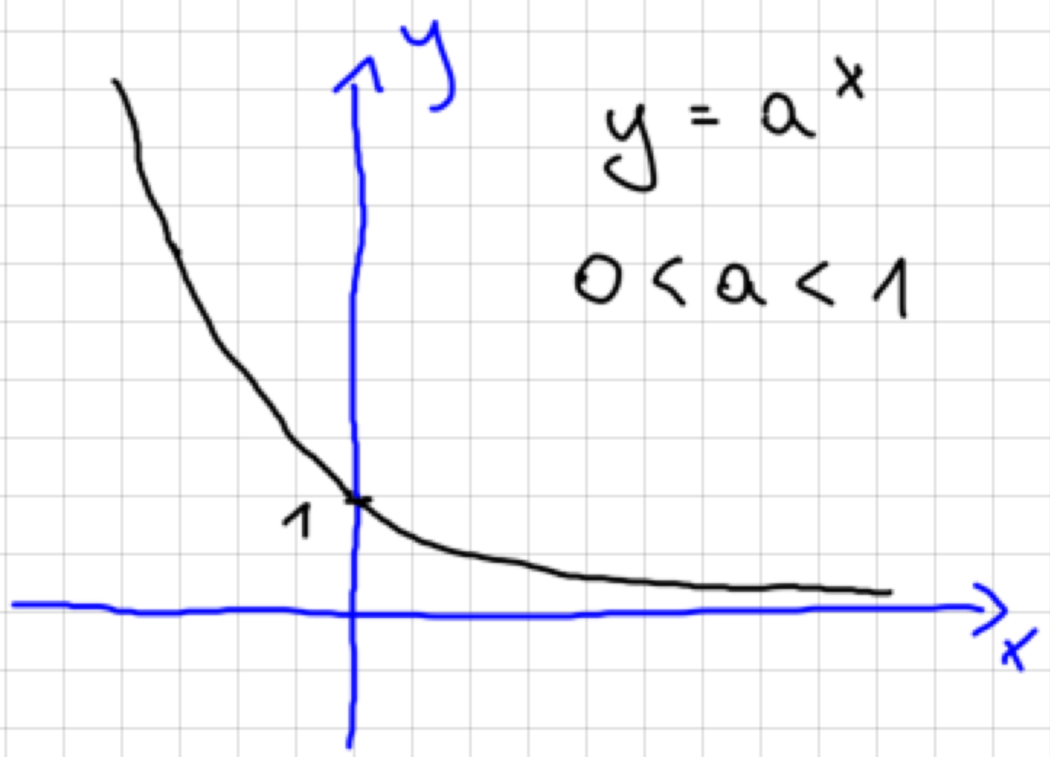
Odp.: $x \in (3, 5) \cup (5, +\infty)$

Funkcja wykładnicza

Jest to funkcja postaci $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$

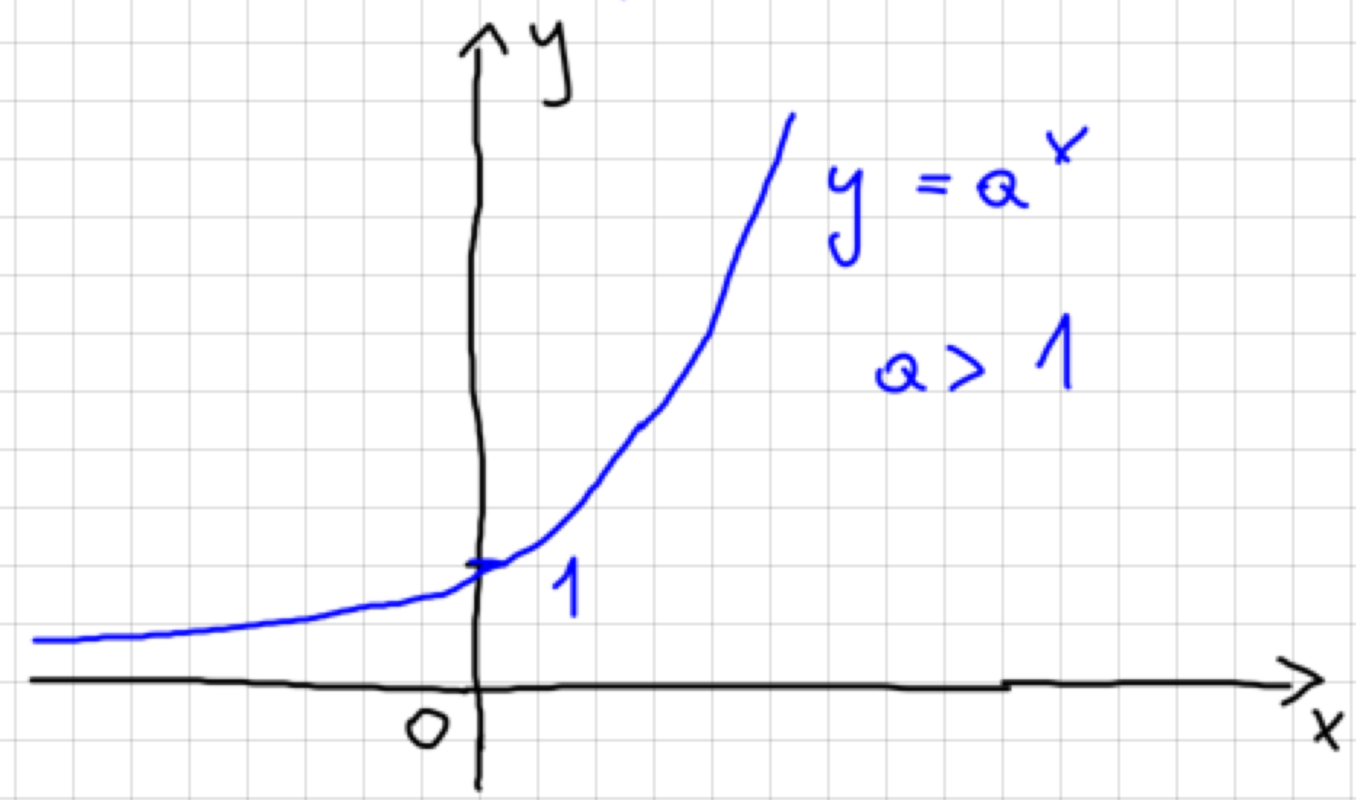
Rozpatrujemy dwa przypadki:

1) $a \in (0,1)$, $x \in \mathbb{R}$



f. malejąca

2) $a > 1$, $x \in \mathbb{R}$



f. rosnąca

funkcje różnowartościowa

Zadanie Rozwiąż równanie :

a) $4^{2x} \cdot 2^{2x+3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1}$ $D = \mathbb{R}$

$(2^2)^{2x} \cdot 2^{2x+3} = (2^{-1})^{2x-1}$

$2^{4x} \cdot 2^{2x+3} = 2^{-2x+1}$

$2^{4x+2x+3} = 2^{-2x+1}$

$2^{6x+3} = 2^{-2x+1}$

Z różnowartościowości funkcji wykładniczej mamy :

$6x+3 = -2x+1$

$6x+2x = 1-3$

$8x = -2 \quad / : 8$

$x = -\frac{2}{8}$

$x = -\frac{1}{4}$

b)

$$5^{-1} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-4x+1} = 1 \qquad D = \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{1} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-4x+1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{0}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{1+x^2-4x+1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{0}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-4x+2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{0}$$

$$x^2-4x+2=0$$

$$\Delta = 16-8 = 8 \ , \ \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$$

$$x_1 = \frac{4-2\sqrt{2}}{2} = \frac{\cancel{2}^{1}(2-\sqrt{2})}{\cancel{2}_{1}} = 2-\sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{4+2\sqrt{2}}{2} = \frac{\cancel{2}^{1}(2+\sqrt{2})}{\cancel{2}_{1}} = 2+\sqrt{2}$$

Odp.: $x_1 = 2-\sqrt{2}$, $x_2 = 2+\sqrt{2}$

c) $$3^{x+2} - 2 \cdot 3^x = 63 \qquad D = \mathbb{R}$$

$$3^x \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^x = 63$$

$$3^x \cdot 9 - 2 \cdot 3^x = 63$$

$$3^x \cdot (9-2) = 63$$

$$3^x \cdot 7 = 63 \quad / : 7$$

$$3^x = 9$$

$$3^x = 3^2$$

$$\underline{x = 2}$$

d) $$4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0 \qquad D = \mathbb{R}$$

$$(2^2)^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$$

$$(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$$

$$t = 2^x, \quad t > 0$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1$$

$$t_1 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$t_2 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Wracamy do podstawienia:

$$t_1 = 1 \quad \vee \quad t_2 = 2$$

$$2^x = 1 \qquad 2^x = 2^1$$

$$2^x = 2^0 \qquad \underline{x = 1}$$

$$\underline{x = 0}$$

whiteboardapp.org