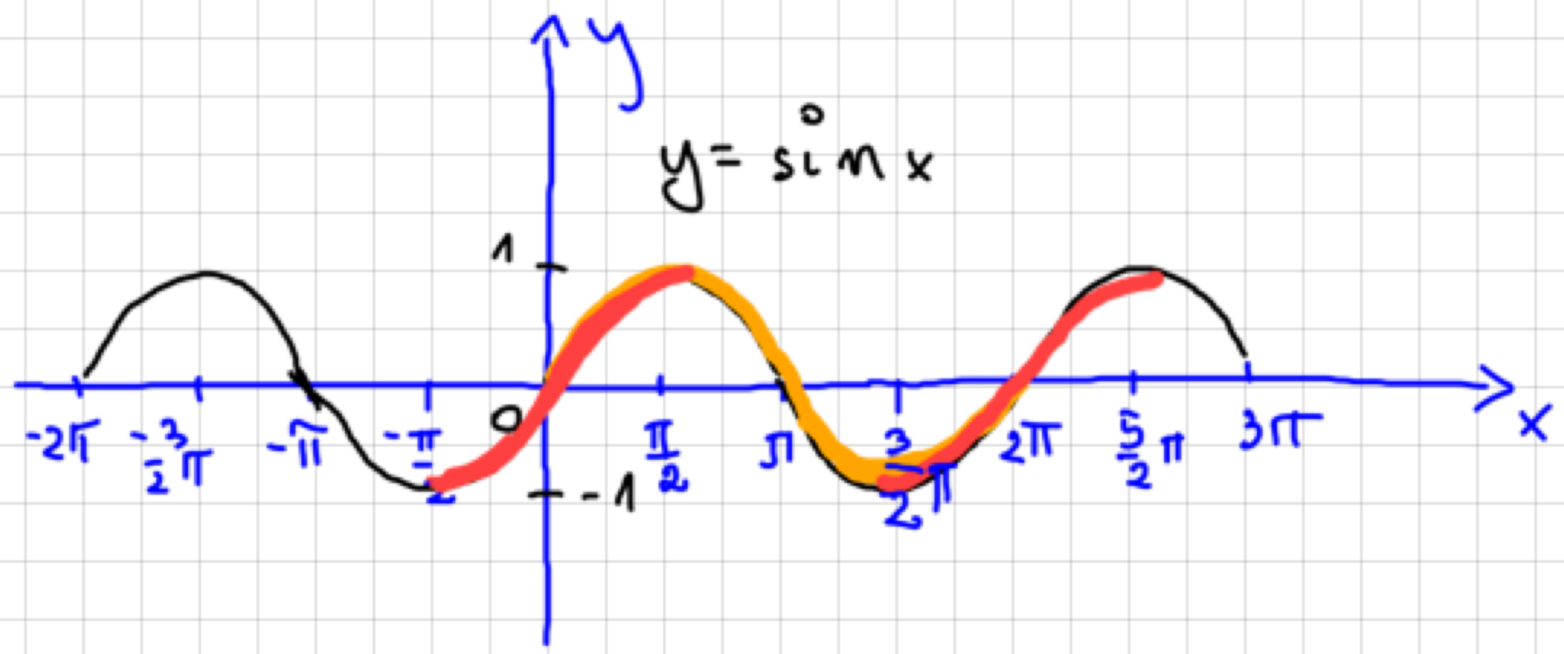
# Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej.

1) $f(x) = \sin x$ , $x \in \mathbb{R}$ , $y \in \langle -1, 1 \rangle$  $\pi = 180^\circ$




Własności funkcji sin x :

a) Mz : $x_0 = 0 + k\pi$ , $k \in \mathbb{Z}$

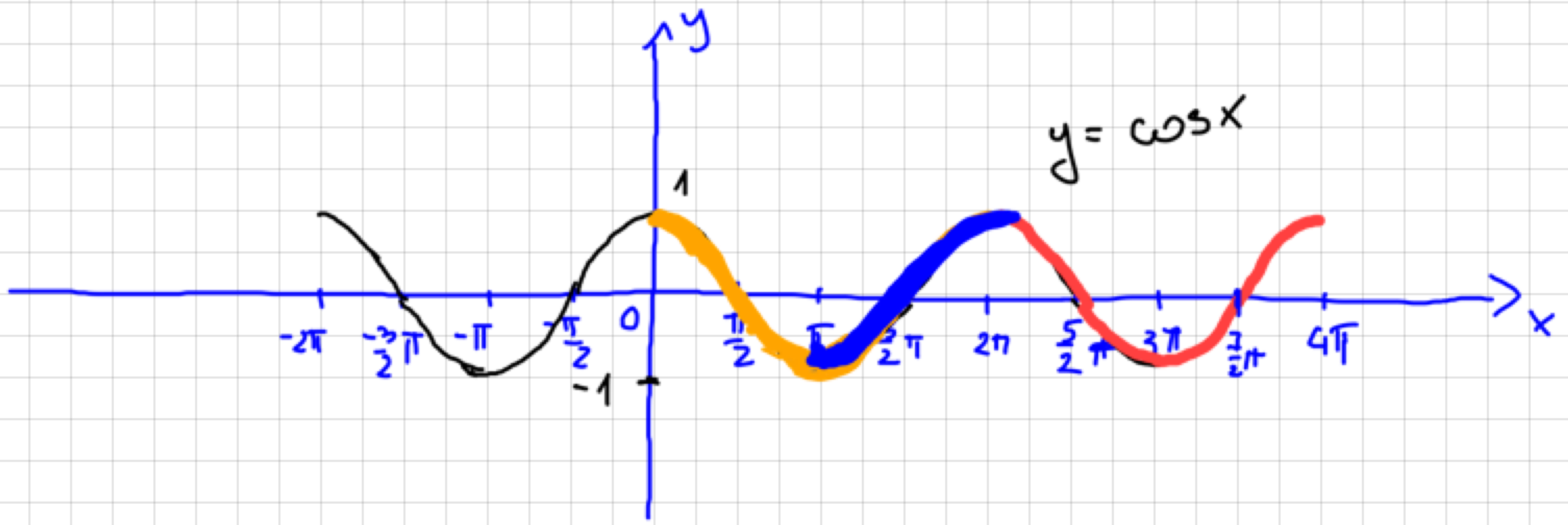
b) okres funkcji sin x : $T = 2k\cdot\pi$ , $k \in \mathbb{Z}$ ; okres podstawowy wynosi $2\pi$

c) funkcja sin x jest rosnąca na przedziałach : $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ , $k \in \mathbb{Z}$

d) funkcja sin x jest malejąca na przedziałach : $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right)$ , $k \in \mathbb{Z}$

e) największa wartość funkcji sin x : 1 , najmniejsza : -1 .

2) $f(x) = \cos x$ , $x \in \mathbb{R}$ , $y \in \langle -1, 1 \rangle$




Własności funkcji cos x :

a) Mz : $x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , $k \in \mathbb{Z}$

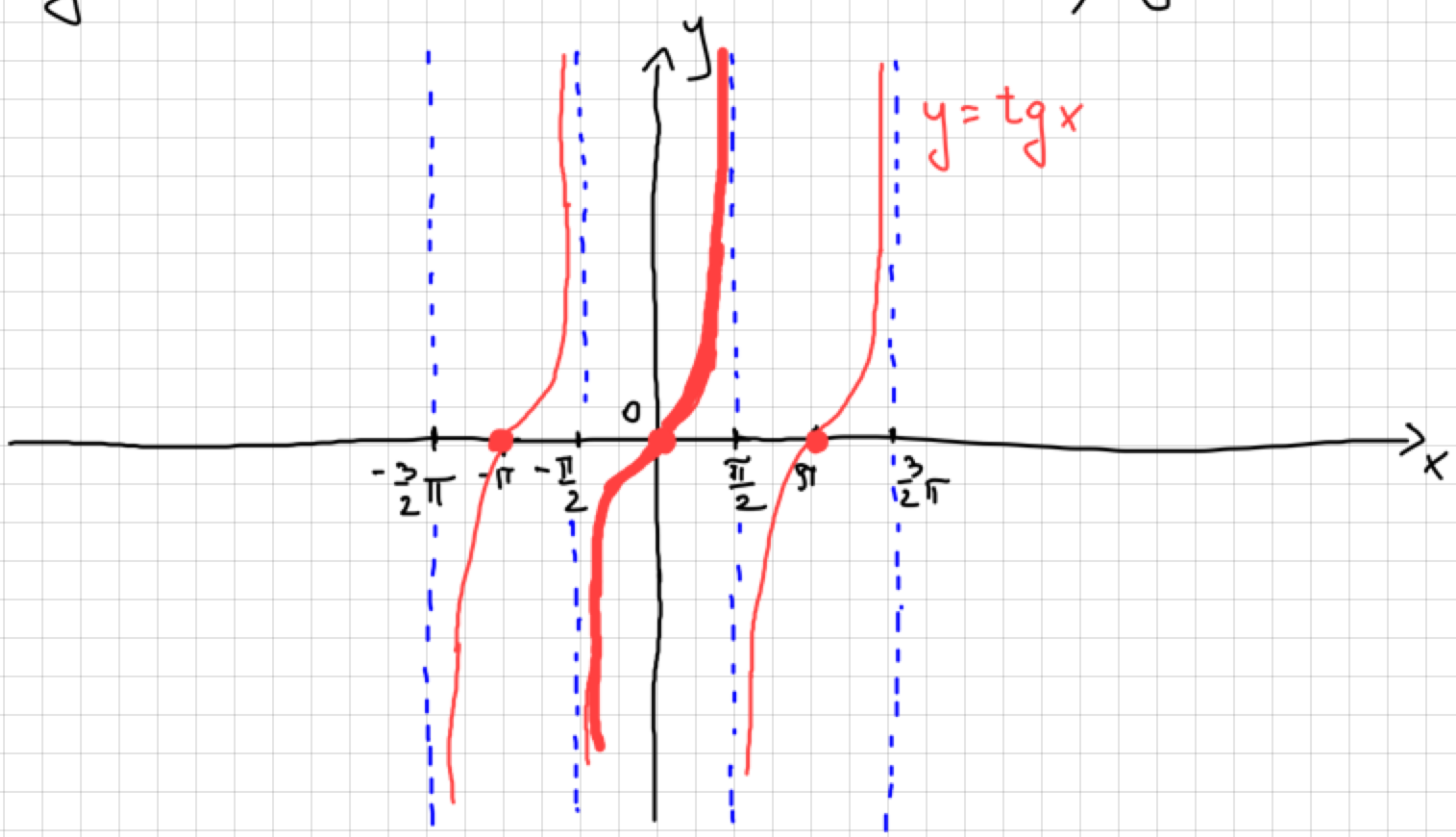
b) okres funkcji cos x wynosi $T = 2k\pi$ , $k \in \mathbb{Z}$ ; okres podstawowy : $2\pi$.

c) funkcja cos x jest rosnąca na przedziałach : $(\pi + 2k\pi ; 2\pi + 2k\pi)$ , $k \in \mathbb{Z}$

d) funkcja cos x jest malejąca na przedziałach : $(0 + 2k\pi ; \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

e) największa wartość funkcji cos x wynosi 1 , najmniejsza (−1).

3) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $\quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\}, k \in \mathbb{Z}$; $y \in \mathbb{R}$




Własności funkcji tg x:

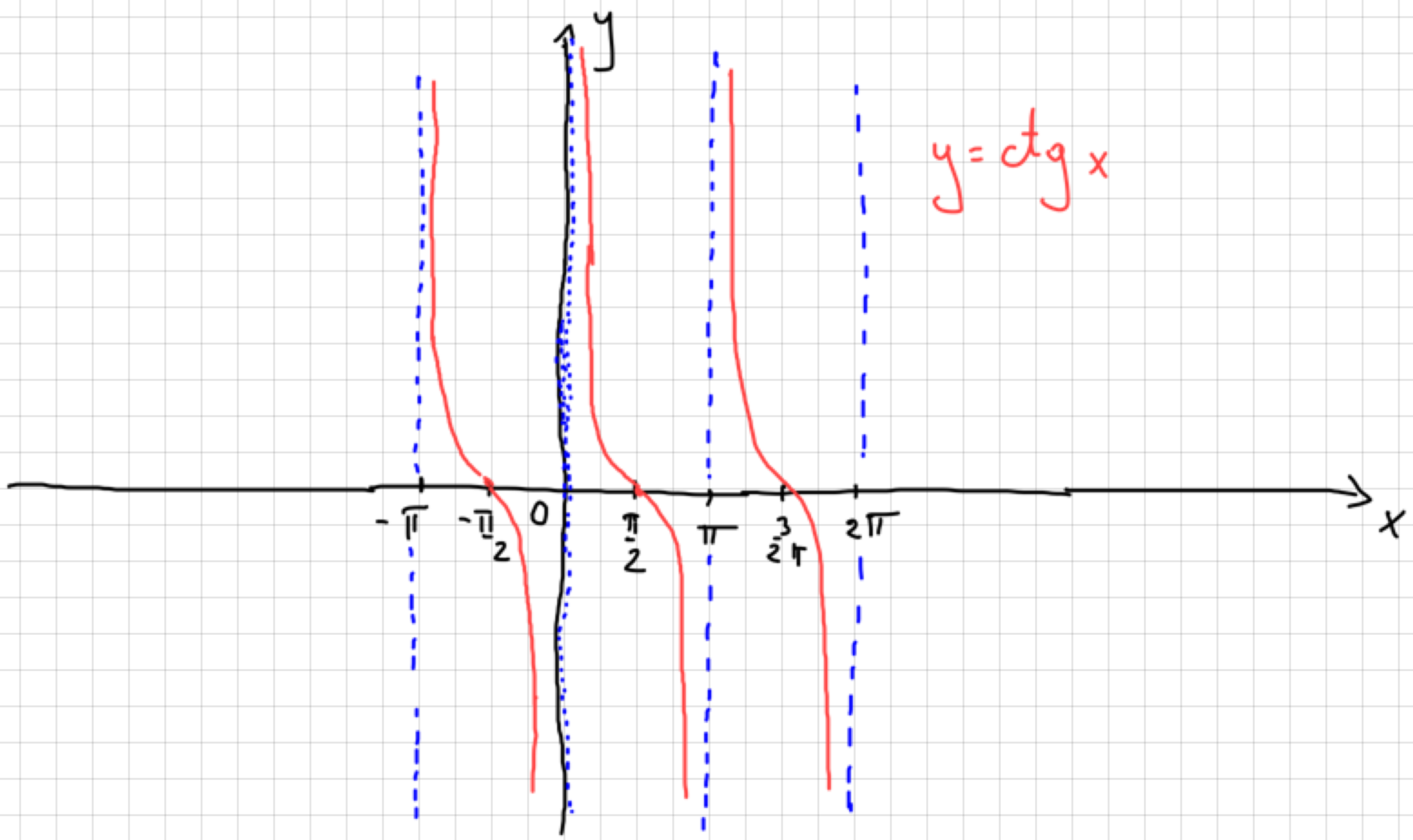
a) $M_z$: $x_0 = 0 + k\pi$, $\quad k \in \mathbb{Z}$

b) okres funkcji tg x: $T = k \cdot \pi$; okres podstawowy wynosi $\pi$.

c) funkcja tg x jest rosnąca na przedziałach: $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

d) funkcja nie osiąga wartości najmniejszej i największej

4) $f(x) = \text{ctg}\, x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0 + k\cdot\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$ $y \in \mathbb{R}$




Własności funkcji $\text{ctg}\, x$:

a) $M_z$: $x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

b) okres funkcji $\text{ctg}\, x$: $T = k\cdot\pi$; okres podstawowy wynosi $\pi$.

c) funkcja $\text{ctg}\, x$ jest malejąca na przedziałach: $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$

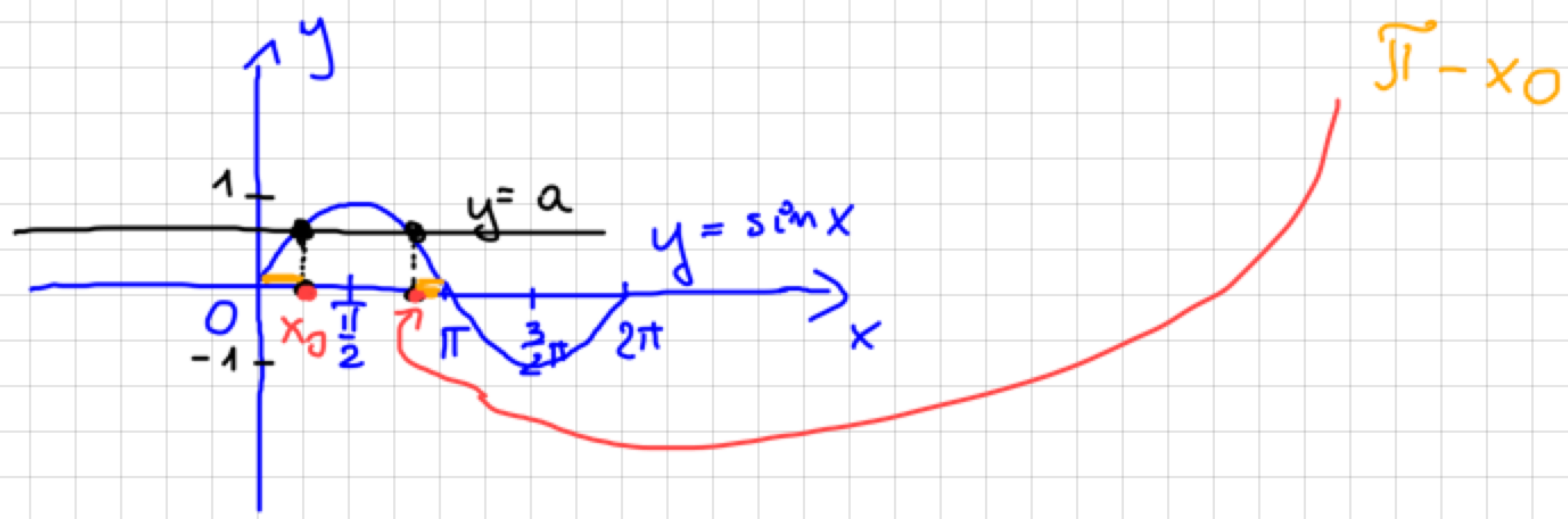
d) funkcja nie osiąga wartości najmniejszej i największej.

Do zapamiętania :

| | $0^\circ = 0$ | $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ | $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ | $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ | $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ | $180^\circ = \pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $0$ |
| $\cos x$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ |
| $\operatorname{tg} x$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | X | $0$ |
| $\operatorname{ctg} x$ | X | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | X |

# Proste równania trygonometryczne

(1) $\sin x = a, \quad a \in \langle -1, 1 \rangle$




$x_0$ - odczytujemy z tabeli lub z wykresu,

$x_0$ spełnia równanie: $\sin x_0 = a$.

Istnieją dwie serie rozwiązań:

$$x_I = x_0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x_{II} = \pi - x_0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Przykład Rozwiąż:

a) $\sin x = \frac{1}{2}$

$x_0 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$

Odp.: $x_I = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x_{II} = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

b) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x_0 = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$

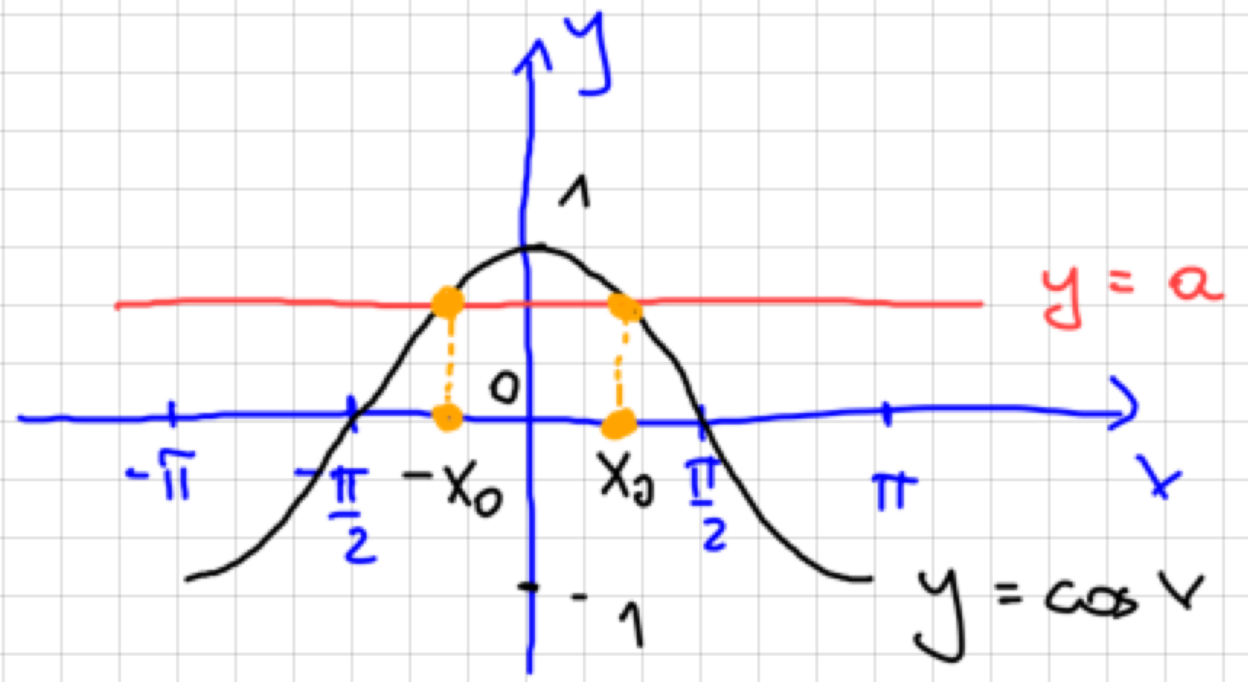
Odp.: $x_I = \frac{\pi}{4} + 2k\pi; \quad x_{II} = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

c) $\sin x = 1$

$x_0 = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$

Odp.: $x_I = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

(2) $\cos x = a$ , $a \in \langle -1, 1 \rangle$




$x_0$ – z tabeli lub wykresu odczytujemy,

$x_0$ spełnia równanie : $\cos x_0 = a$.

Istnieją dwie serie rozwiązań :

$x_I = x_0 + 2k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

$x_{II} = -x_0 + 2k\pi$

Przykład Rozwiąż równanie :

a) $\cos x = \frac{1}{2}$

$x_0 = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$

Odp.: $x_I = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ , $x_{II} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ; $k \in \mathbb{Z}$

b) $\cos x = 1$

$x_0 = 0^\circ = 0$

Odp.: $x_I = 0 + 2k\pi$

c) $\cos x = 0$

$x_0 = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$

$x_I = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , $k \in \mathbb{Z}$

$x_{II} = -\frac{\pi}{2} + k\pi$ , $k \in \mathbb{Z}$