Asymptoty wykresu funkcji

Definicja 6.1 (asymptota pionowa lewostronna). *Niech funkcja f będzie określona na lewostronnym sąsiedztwie punktu a.* ***Prosta*** $x = a$ ***jest asymptotą pionową lewostronną funkcji*** f*, jeżeli*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

albo

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty,$$

Definicja 6.2 (asymptota pionowa prawostronna). *Niech funkcja f będzie określona na prawostronnym sąsiedztwie punktu a.* ***Prosta*** $x = a$ ***jest asymptotą pionową prawostronną funkcji*** f*, jeżeli*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

albo

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty,$$

Definicja 6.3. ***Prosta jest asymptotą pionową obustronną funkcji****, jeżeli jest jednocześnie jej asymptotą lewostronną i prawostronną.*

Definicja 6.4 (asymptota ukośna i pozioma funkcji w $+\infty$). *Niech funkcja f będzie określona na sąsiedztwie $+\infty$.* ***Prostą o równaniu*** $y = mx + n$ ***nazywamy asymptotą ukośną funkcji*** f ***w*** $+\infty$*, gdy*

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx - n) = 0.$$

W szczególności, gdy $m = 0$ mamy ***asymptotę poziomą funkcji*** f ***w*** $+\infty$ ***o równaniu*** $y = n$*.*

Twierdzenie 6.1 (warunek istnienia asymptoty ukośnej). ***Prosta o równaniu*** $y = mx + n$ ***jest asymptotą ukośną funkcji*** f ***w*** $+\infty$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

oraz

$$n = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx).$$

Zad 1

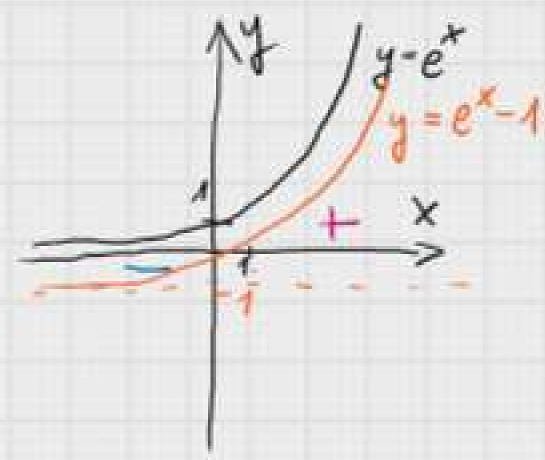
Wyznaczyć asymptoty wykresu funkcji $f(x)=\dfrac{1}{e^x-1}$

$D:\ e^x-1\neq 0$, $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$e^x\neq 1$

$e^x\neq e^0$

$x\neq 0$



Wyznaczamy asymptot pionowych

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{e^x-1}=\left[\frac{1}{0^+}\right]=+\infty$$

Prosta $x=0$ jest asymptotą pionową prawostronną wykresu funkcji f.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{e^x-1}=\left[\frac{1}{0^-}\right]=-\infty$$

Prosta $x=0$ jest asymptotą pionową lewostronną wykresu funkcji f.

Prosta $x=0$ jest asymptotą pionową obustronną wykresu funkcji f.

Wyznaczamy asymptoty ukośne $y=m_1x+n_1$ w $+\infty$

$$m_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{e^x-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\underset{+\infty}{x}\cdot\underset{+\infty}{(e^x-1)}}=$$

$$=\left[\frac{1}{\infty\cdot\infty}\right]=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0$$

$$n_1=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x-1}-0\cdot x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\underset{\infty}{e^x-1}}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0$$

$$y=m_1x+n_1 \Rightarrow y=0\cdot x+0 \Rightarrow y=0$$

Prosta $y=0$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji f w $+\infty$

Wyznaczamy asymptoty ukośne $y=m_2x+n_2$ w $-\infty$

$$m_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{e^x-1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\underset{-\infty}{x}(\underset{0}{e^x}-1)}=$$

$$=\left[\frac{1}{-\infty(0-1)}\right]=\left[\frac{1}{-\infty\cdot(-1)}\right]=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0$$

$$n_2=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e^x-1}-0\cdot x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\underset{0}{e^x}-1}=\left[\frac{1}{0-1}\right]=-1$$

$$y=m_2x+n_2 \Rightarrow y=0\cdot x+(-1)\Rightarrow y=-1$$

Prosta $y=-1$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji f w $-\infty$

Zad. 2
Wyznaczyć asymptoty wykresu funkcji $f(x) = \frac{\ln x}{1-\ln x}$

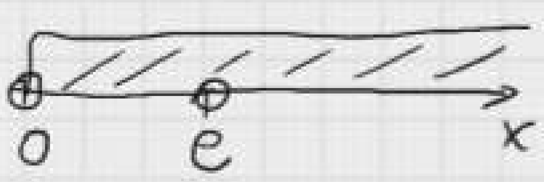
$D: 1-\ln x \neq 0 \ \wedge \ x>0$

$1 \neq \ln x$

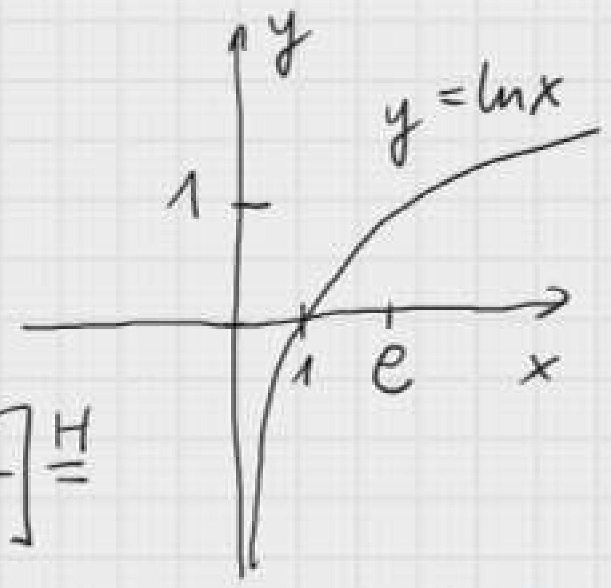
$\ln x \neq 1$

$\ln x \neq \ln e^1$

$x \neq e$



$D = (0,e) \cup (e,+\infty)$



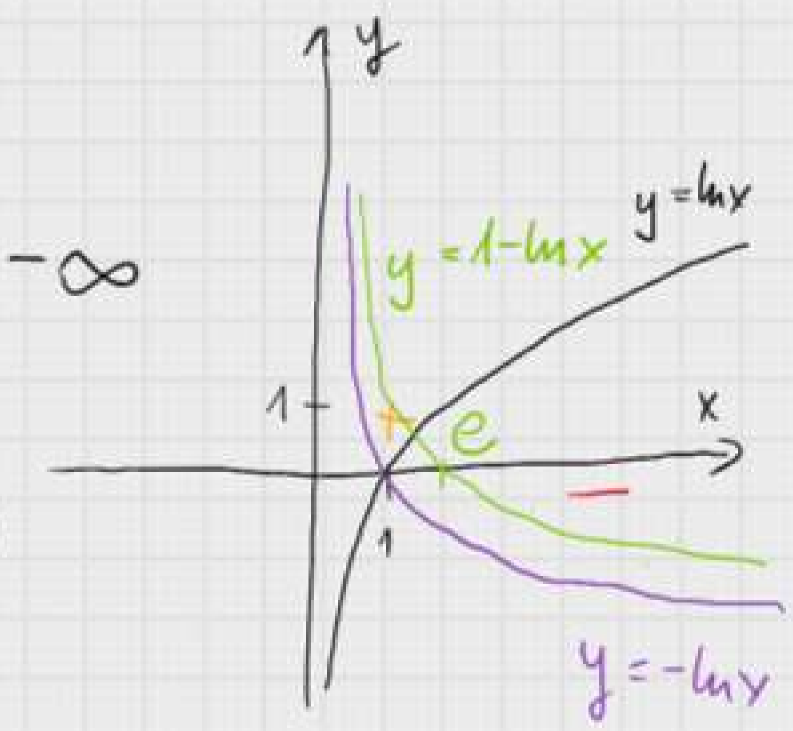
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1-\ln x} = \left[\frac{-\infty}{1-(-\infty)}\right] = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{(1-\ln x)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{(1)'-(\ln x)'} =$$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{0-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} (-1) = -1$$

$$\lim_{x\to e^+} f(x) = \lim_{x\to e^+} \frac{\ln x}{1-\ln x} = \left[\frac{\ln e}{1-\ln(e^+)}\right] = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$



Prosta $x=e$ jest asymptotą pionową prawostronną wykresu funkcji f.

$$\lim_{x\to e^-} f(x) = \lim_{x\to e^-} \frac{\ln x}{1-\ln x} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

Prosta $x=e$ jest asymptotą pionową lewostronną wykresu funkcji f.

Prosta $x=e$ jest asymptotą pionową obustronną wykresu funkcji f.

Wyznaczanie asymptoty ukośnej $y = mx+n$ w $+\infty$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\ln x}{1-\ln x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\underset{\to\infty}{\ln x}}{x(1-\ln x)} = \left[\frac{\infty}{\infty\cdot(1-\infty)}\right] =$$

$$= \left[\frac{\infty}{-\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{\ln x}^{\,1}}{x\cdot\cancel{\ln x}_{\,1}\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\underset{\infty}{x}\Big(\underset{0}{\frac{1}{\underset{\infty}{\ln x}}}-1\Big)} = \left[\frac{1}{\infty(0-1)}\right] = \left[\frac{1}{-\infty}\right] = 0$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} (f(x)-mx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{1-\ln x} - 0\cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{1-\ln x} = \left[\frac{\infty}{-\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{\ln x}^{\,1}}{\cancel{\ln x}_{\,1}\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\underset{0}{\frac{1}{\underset{\infty}{\ln x}}}-1} = \left[\frac{1}{0-1}\right] = -1$$

$$y = 0\cdot x + (-1) \Rightarrow y = -1$$

Prosta $y = -1$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji f w $+\infty$.