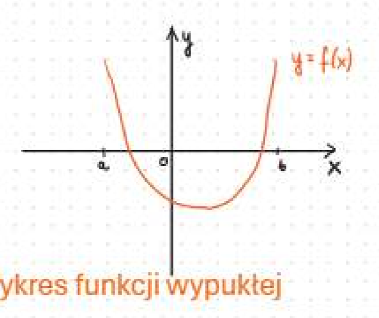
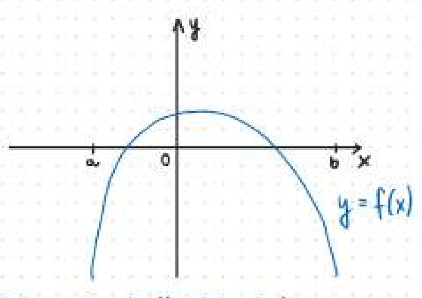
Wypukłość i wklęsłość funkcji

Twierdzenie 10.6 (Warunki wystarczające wypukłości i wklęsłości funkcji). *Niech $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną na przedziale (a,b). Wówczas*

- *jeżeli*
$$\forall_{x\in(a,b)}\ f''(x)>0,$$
to funkcja f jest ściśle wypukła na przedziale (a,b);
- *jeżeli*
$$\forall_{x\in(a,b)}\ f''(x)<0,$$
to funkcja f jest ściśle wklęsła na przedziale (a,b).



Wykres funkcji wypukłej



Wykres funkcji wklęsłej

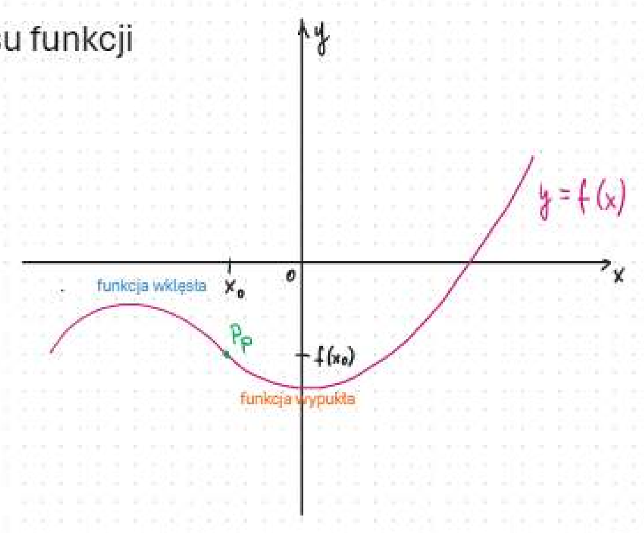
Punkt przegięcia wykresu funkcji

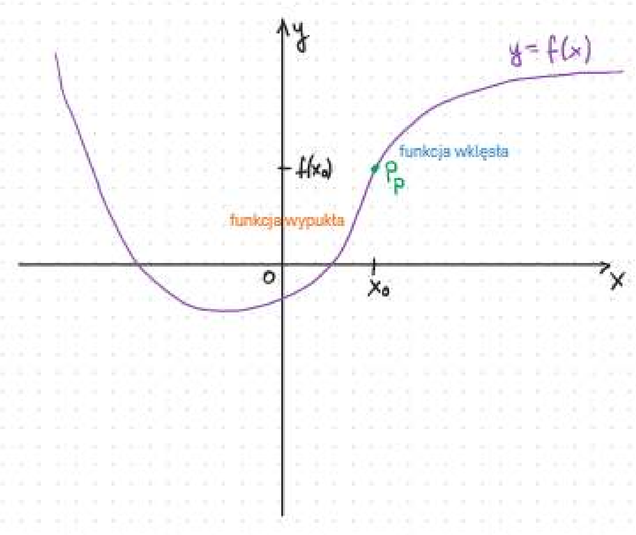
Twierdzenie 10.7 (Warunek konieczny istnienia punktu przegięcia). *Jeżeli funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie x_0 oraz x_0 jest punktem przegięcia funkcji f, to $f''(x_0)=0$.*

Twierdzenie 10.8 (Warunek wystarczający istnienia punktu przegięcia). *Jeżeli*

1. *funkcja f ma w punkcie x_0 pochodną (właściwą lub niewłaściwą),*
2. *funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna na pewnym sąsiedztwie punktu x_0,*
3. - $\exists_{\delta>0}[f''(x)<0\ \ dla\ \ x\in S^-(x_0,\delta)\wedge f''(x)>0\ \ dla\ \ x\in S^+(x_0,\delta)]$, *lub*
   - $\exists_{\delta>0}[f''(x)>0\ \ dla\ \ x\in S^-(x_0,\delta)\wedge f''(x)<0\ \ dla\ \ x\in S^+(x_0,\delta)]$,

to punkt x_0 jest punktem przegięcia funkcji f.





Zad.1

Wyznaczyć przedziały wypukłości, wklęsłości i punkty przegięcia wykresu funkcji $f(x)=\ln(4+x^2)$

$D_f:\ 4+x^2>0$

$x^2>-4$

$x\in\mathbb{R}$

$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

$D_f=\mathbb{R}$

$f'(x)=(\ln(4+x^2))'=\frac{1}{4+x^2}\cdot(4+x^2)'=\frac{1}{4+x^2}\cdot(0+2x)=\frac{2x}{4+x^2}$, $D_{f'}=D_f$

$f''(x)=\left(\frac{2x}{4+x^2}\right)'=\frac{(2x)'\cdot(4+x^2)-2x\cdot(4+x^2)'}{(4+x^2)^2}=\frac{2(4+x^2)-2x(0+2x)}{(4+x^2)^2}=$

$=\frac{8+2x^2-4x^2}{(4+x^2)^2}=\frac{8-2x^2}{(4+x^2)^2}$, $D_{f''}=D_f$

$f''(x)=0 \iff \frac{8-2x^2}{(4+x^2)^2}=0$

$8-2x^2=0\ /:2$

$4-x^2=0$

$(2-x)(2+x)=0$

$2-x=0 \ \vee\ 2+x=0$

$x=2\in D_f \quad x=-2\in D_f$

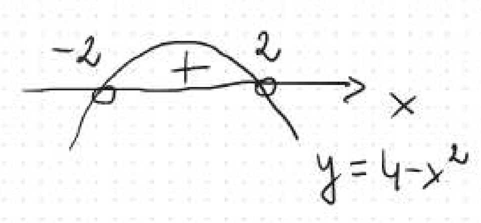
$f''(x)>0 \iff \frac{8-2x^2}{(4+x^2)^2}>0$

$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}}(4+x^2)^2>0$ zatem $8-2x^2>0\ /:2$

$4-x^2>0$

$(2-x)(2+x)>0$

$x\in(-2,2)$



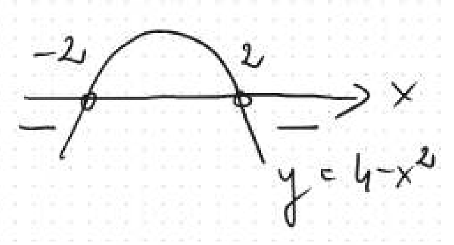
$f''(x)<0 \iff \frac{8-2x^2}{(4+x^2)^2}<0$

$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}}(4+x^2)^2>0$ zatem $8-2x^2<0$

$4-x^2<0$

$(2-x)(2+x)<0$

$x\in(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$



x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,2)$	2	$(2,\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\frown$	P.P $\ln 8$	$\smile$	P.P $\ln 8$	$\frown$

$f(-2)=\ln(4+(-2)^2)=\ln 8$

$f(2)=\ln(4+2^2)=\ln 8$

Odp. Funkcja f jest wypukła na przedziale $(-2,2)$.
Funkcja f jest wklęsła na przedziale $(-\infty,-2)$ oraz na przedziale $(2,\infty)$.
Funkcja f ma punkty przegięcia w punktach $x=-2$ i $x=2$.

Zad.2

Wyznaczyć przedziały wypukłości , wklęsłości i punkty przegięcia funkcji $f(x)=\frac{3}{\ln^2 x}$

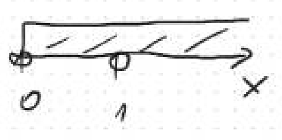
$D_f:\ x>0\ \wedge\ \ln^2 x\neq 0$

$(\ln x)^2\neq 0$

$\ln x\neq 0$

$x\neq e^0$

$x\neq 1$



$D_f=(0,1)\cup(1,\infty)$

$(x^2)'=2x^1$

$f'(x)=\left(\frac{3}{\ln^2 x}\right)'=\frac{(3)'\cdot\ln^2 x-3\cdot(\ln^2 x)'}{(\ln^2 x)^2}=\frac{0-3\cdot((\ln x)^2)'}{(\ln x)^4}=$

$=\frac{-3\cdot 2\cdot\ln x\cdot(\ln x)'}{(\ln x)^4}=\frac{-6\cancel{(\ln x)}\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^{\cancel{4}\,3}}=\frac{-6}{x\cdot(\ln x)^3}$, $D_{f'}=D_f$

$f''(x)=\left(\frac{-6}{x\cdot(\ln x)^3}\right)'=\frac{(-6)'\cdot x(\ln x)^3-(-6)\cdot(x\cdot(\ln x)^3)'}{(x(\ln x)^3)^2}=$

$=\frac{0+6\left((x)'\cdot(\ln x)^3+x\cdot((\ln x)^3)'\right)}{x^2(\ln x)^6}=\frac{6\left(1\cdot(\ln x)^3+x\cdot 3(\ln x)^2\cdot(\ln x)'\right)}{x^2(\ln x)^6}=$

$=\frac{6\left((\ln x)^3+\cancel{x}\cdot 3(\ln x)^2\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\right)}{x^2(\ln x)^6}=\frac{6\left((\ln x)^3+3(\ln x)^2\right)}{x^2(\ln x)^6}=\frac{6\cdot\cancel{(\ln x)^2}(\ln x+3)}{x^2(\ln x)^{\cancel{6}\,4}}=$

$=\frac{6(\ln x+3)}{x^2(\ln x)^4}$, $D_{f''}=D_f$

$f''(x)=0 \iff \frac{6(\ln x+3)}{x^2(\ln x)^4}=0$

$6(\ln x+3)=0\ /:6$

$\ln x+3=0$

$\ln x=-3$

$x=e^{-3}\in D_f$

$f''(x)>0 \iff \frac{6(\ln x+3)}{x^2(\ln x)^4}>0$

$\bigwedge_{x\in D_f}x^2(\ln x)^4>0$ zatem $6(\ln x+3)>0\ /:6$

$\ln x+3>0$

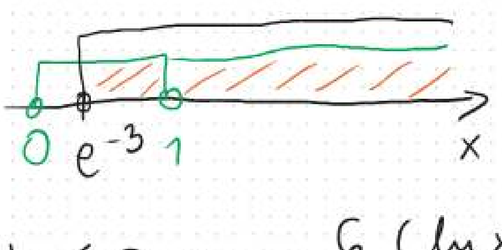
$\ln x>-3$

$\ln x>\ln e^{-3}$

funkcja rosnąca

$x>e^{-3}\ \wedge\ x\in D_f$

$x\in(e^{-3},1)\cup(1,\infty)$



$f''(x)<0 \iff \frac{6(\ln x+3)}{x^2(\ln x)^4}<0$

$\bigwedge_{x\in D_f}x^2(\ln x)^4>0$ zatem $6(\ln x+3)<0\ /:6$

$\ln x+3<0$

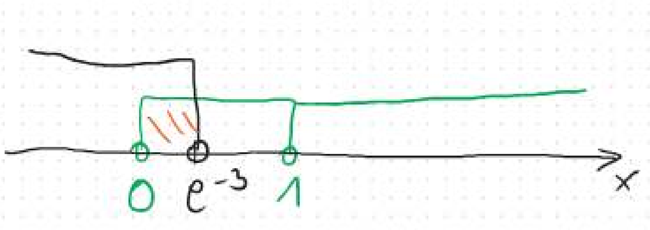
$\ln x<-3$

$\ln x<\ln e^{-3}$

funkcja rosnąca

$x<e^{-3}\ \wedge\ x\in D_f$

$x\in(0,e^{-3})$



x	$(0,e^{-3})$	e^{-3}	$(e^{-3},1)$	1	$(1,\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$\times$	$+$
$f(x)$	$\frown$	P.P $\frac{1}{3}$	$\smile$	$\times$	$\smile$

$f(e^{-3})=\frac{3}{(\ln e^{-3})^2}=\frac{3}{(-3)^2}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

Odp. Funkcja f jest wklęsła na przedziale $(0,e^{-3})$.
Funkcja f jest wypukła na przedziale $(e^{-3},1)$ oraz na przedziale $(1,\infty)$.
Funkcja f ma punkt przegięcia w punkcie $x=e^{-3}$.