## Teoria

Twierdzenie 1 (Newtona - Leibnitza, I podstawowe twierdzenie rachunku całkowego) Jeżeli funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła na przedziale $[a,b]$, to $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$, gdzie $F$ oznacza dowolną funkcję pierwotną funkcji $f$ na tym przedziale.
Różnicę $F(b)-F(a)$ oznaczamy $F(x)|_a^b$.

Twierdzenie 2 Niech krzywa $AB$ będzie określona równaniem $y=f(x)$ dla $x\in[a,b]$, gdzie $f$ jest funkcją dodatnią i ciągłą na przedziale $[a,b]$. Wówczas pole $|P|$ trapezu krzywoliniowego ograniczonego krzywą $AB$ oraz prostymi $y=0$, $x=a$ oraz $x=b$, wyraża się wzorem:

$$|P| = \int_a^b f(x)dx.$$

Wniosek 1 Jeżeli trapez krzywoliniowy $P$ określony jest następująco

$$P = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b \ \wedge \ f_1(x)\le y\le f_2(x)\},$$

gdzie funkcje $f_1$ i $f_2$ są ciągłe na przedziale $[a,b]$ oraz $f_1(x)\le f_2(x)$ dla każdego $x\in[a,b]$, to pole trapezu krzywoliniowego wyraża się wzorem $|P| = \int_a^b (f_2(x)-f_1(x))\,dx$.

Twierdzenie 3 Jeżeli łuk $l$ dany jest równaniem jawnym $y=f(x)$, $x\in[a,b]$, gdzie $f$ jest funkcją posiadającą ciągłą pochodną na przedziale $[a,b]$, to długość $|l|$ tego łuku wyraża się wzorem $|l| = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$.

Twierdzenie 4 Niech

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b \ \wedge \ 0\le y\le f(x)\},$$

gdzie $f$ jest funkcją ciągłą na przedziale $[a,b]$, oznacza trapez krzywoliniowy. Wtedy objętość bryły $V$ powstałej z obrotu trapezu krzywoliniowego $D$ wokół osi $0x$ wyraża się wzorem $|V| = \pi\int_a^b f^2(x)dx$.

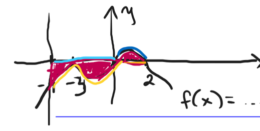
## Zadania

Zadanie 1 Obliczymy pole obszaru ograniczonego krzywymi: $y = x(x+3)^2(2-x)$, $x=-4$, oś $Ox$.

P

$f(x) =$

0 −3 2
(1) (2) (1)




$g(x)=0$

$f(x) = \dots$

$x(x^2+6x+9)(2-x)$



$$|P| = \int_{-4}^{0}(0-f(x))dx + \int_0^2 (f(x)-0)dx = -\int_{-4}^{0} f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx =$$

$$= -\int_{-4}^{0}(-x^4+\dots+18x)dx + \int_0^2(-x^4+\dots+18x)dx =$$

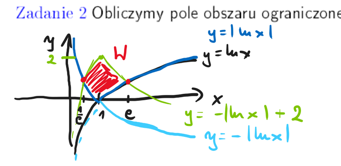
$$= \left(\tfrac{1}{5}x^5+\dots-9x^2\right)\Big|_{-4}^{0} + \left(-\tfrac{1}{5}x^5\dots+9x^2\right)\Big|_0^2 =$$

$$= \left(\tfrac{1}{5}0^5+\dots-9\cdot 0^2\right) - \left(\tfrac{1}{5}(-4)^5+\dots-9\cdot(-4)^2\right) + \left(-\tfrac{1}{5}2^2+\dots\right.$$



Zadanie 2 Obliczymy pole obszaru ograniczonego krzywymi: $\boxed{y=|\ln(x)|,}$ $y = -|\ln(x)|+2$.

W




$|\ln x| = -|\ln x| + 2$

$2|\ln x| = 2$

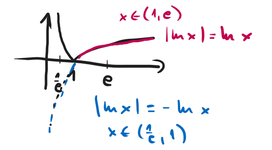
$|\ln x| = 1$

$\ln x = 1 \ \vee \ \ln x = -1$

$x = e \ \vee \ x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$$|W| = \int_{\frac{1}{e}}^{e}\left((-|\ln x|+2) - |\ln x|\right)dx = \int_{\frac{1}{e}}^{e}(2-2|\ln x|)dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{e}}^{e} 2\,dx - 2\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx = 2\cdot\left(e-\tfrac{1}{e}\right) - 2\left[\int_{\frac{1}{e}}^{1}|\ln x|dx + \int_1^e |\ln x|dx\right]$$




$$= 2\left(e-\tfrac{1}{e}\right) - 2\left[-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x\,dx + \int_1^e \ln x\,dx\right] =$$

$$= 2\left(e-\tfrac{1}{e}\right) - 2\left[(x - x\ln x)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + (x\ln x - x)\Big|_1^e\right] = 2\left(e-\tfrac{1}{e}\right) - 2\left[(1-1\cdot\underbrace{\ln 1}_{=0}) - \left(\tfrac{1}{e}-\tfrac{1}{e}\underbrace{\ln\tfrac{1}{e}}_{=-1}\right) + (e\underbrace{\ln e}_{=1}-e) - (1\underbrace{\ln 1}_{=0}-1)\right]$$

① − $\frac{1}{e}$ ⓔ − ①

$$\int \ln x\,dx = \left\{\begin{matrix} f(x)=\ln x & g'(x)=1 \\ f'(x)=\frac{1}{x} & g(x)=x\end{matrix}\right\} = x\ln x - \int \underbrace{\tfrac{1}{x}\cdot x}_{=1}\,dx = x\ln x - x + C$$

Zadanie 3 Obliczymy długość łuku krzywej: $y = \sqrt{x-x^2} + \arcsin(\sqrt{x})$, gdzie $x\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$.

$f(x) = \sqrt{x-x^2} + \arcsin\sqrt{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}\cdot(1-2x) + \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}(1-2x) + \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}\cdot(1-2x) + \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}\cdot 1$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}\left[\underbrace{(1-2x)+1}_{2-2x}\right] = \frac{1-x}{\sqrt{x-x^2}}$$

$$\left[f'(x)\right]^2 = \frac{(1-x)^2}{x-x^2} = \frac{(1-x)^2}{x(1-x)} = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1$$

$$1 + \left[f'(x)\right]^2 = 1 + \frac{1}{x} - 1 = \frac{1}{x}$$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ \Big|\cdot 2$

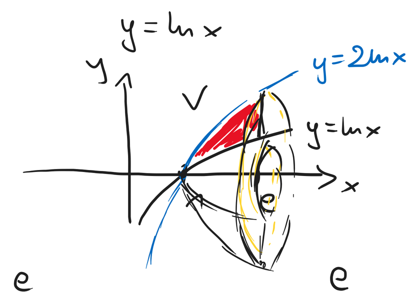
$(2\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$|L| = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{x}}dx = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2\sqrt{\tfrac{1}{2}} - 2\sqrt{\tfrac{1}{4}} = 2\sqrt{\tfrac{1}{2}} - 2\cdot\tfrac{1}{2} = 2\sqrt{\tfrac{1}{2}} - 1$$

Zadanie 4 Obliczymy objętość bryły powstałej z obrotu figury: $1\le x\le e$, $\ln(x)\le y\le\ln(x^2)$ wokół osi $Ox$.

V




$y = \ln x^2$

$y = 2\ln x$

$$|V| = \pi\int_1^e (2\ln x)^2dx - \pi\int_1^e(\ln x)^2dx = 4\pi\int_1^e \ln^2 x\,dx - \pi\int_1^e \ln^2 x\,dx =$$

$$= (4\pi - \pi)\int_1^e \ln^2 x\,dx = 3\pi\cdot\int_1^e \ln^2 x\,dx = \dots$$

$\boxed{(\ln x)^2}$

$$\int \ln^2 x\,dx = \left\{\begin{matrix} f(x)=\ln^2 x & g'(x)=1 \\ f'(x)=2\ln x\cdot\frac{1}{x} & g(x)=x\end{matrix}\right\} =$$

$$= x\ln^2 x - \int 2\ln x\underbrace{\tfrac{1}{x}\cdot x}_{=1}dx = x\ln^2 x - 2\int\ln x\,dx$$