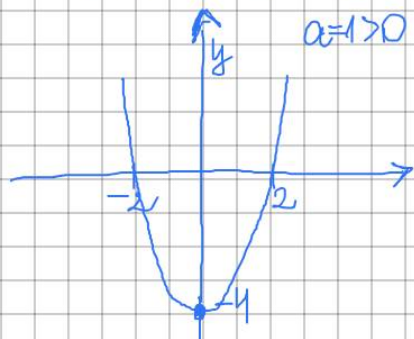


2 Funkcja kwadratowa 9.10.2025

- postać ogólna $f(x) = ax^2 + bx + c$ $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$
- postać kanoniczna $f(x) = a(x-p)^2 + q$ $\Omega = (p, q)$ - wierzchołek paraboli
- postać iloczynowa $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ x_1, x_2 - miejsca zerowe $(\Delta \geq 0)$

Przykład $f(x) = x^2 - 4, x \in \mathbb{R}$ - postać ogólna i kanoniczna $p=0, q=-4$ $(x-0)^2 + (-4)$
 $f(x) = (x-2)(x+2)$ - postać iloczynowa $2, -2$ miejsca zerowe



Własności funkcji f :

- $D = \mathbb{R}$ $Zw = [-4, +\infty)$
- Miejsca zerowe: $-2, 2$ $\{ \Delta > 0 \}$
- Jest to funkcja parzysta
- Nie jest to funkcja różnowartościowa, bo $f(-2) = f(2) = 0$.
- Funkcja rośnie w $(0, +\infty)$ i maleje w $(-\infty, 0)$.

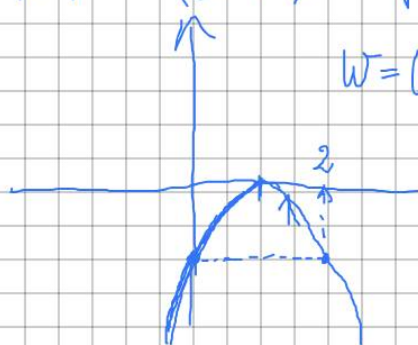
zad. 1 Zapisz f w postaci trygonometrycznej i kanonicznej. Narysuj wykres f i podaj własności

a) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

$$f(x) = -(x^2 - 2x + 1)$$

$$f(x) = -(x-1)^2 \rightarrow \text{postać kanoniczna i trygonometryczna}$$

$$W = (1, 0) \quad a = -1 < 0$$



• $D = \mathbb{R}$ $ZW = (-\infty, 0]$

• Miejsca zerowe: 1 $\{ \Delta = 0 \}$

• Funkcja nie jest parzysta, nieparzysta

• Funkcja nie jest równoważna.
($f(0) = f(2) = -1$)

• f rośnie w $(-\infty, 1)$ i maleje w $(1, +\infty)$.

b) $f(x) = x^2 + 2x + 5$

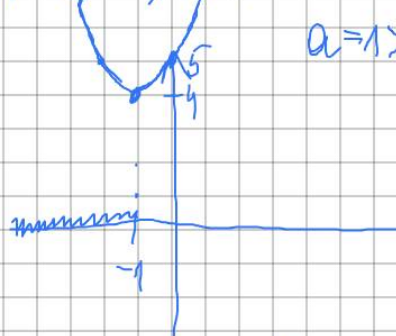
$$f(x) = (x^2 + 2x + 1) + 4$$

$$f(x) = (x+1)^2 + 4$$

$$W = (-1, 4)$$

$$a = 1 > 0$$

$$\text{😊}$$



$D = \mathbb{R}$ $ZW = [4, +\infty)$

Miejsca zerowe: brak ($\Delta < 0$)

Zad 2, Rozwiązać nierówność / nierówności:

a) $x^2 - 2x - 3 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - 4}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + 4}{2} = 3$$

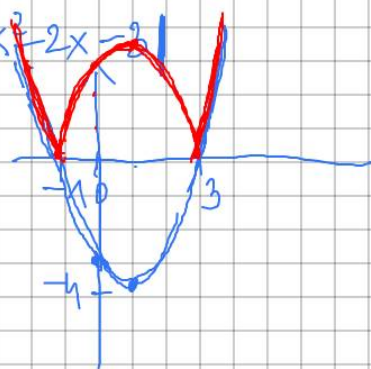
Odp. $x = -1 \vee x = 3$

$$x \in \{-1, 3\}$$

$$\left\{ \text{spr. } (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0 \right\}$$

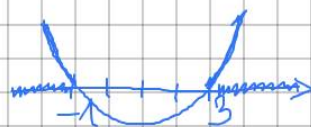
Zad 1c)

$$f(x) = |x^2 - 2x - 3|$$



b) $x^2 - 2x - 3 > 0$

! Odczytujemy rozwiązanie z wykresu



$$a = 1 > 0$$

Odp. $x \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$

$$|g(x)| = \begin{cases} g(x) & g(x) \geq 0 \\ -g(x) & g(x) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 &= x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 = \\ &= (x - 1)^2 - 4 \end{aligned}$$

$$W = (1, -4)$$

$$c) x^2 + 2x + 5 > 0$$

$$\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$$

brak miejsc zerowych



odp. $x \in \mathbb{R}$

$$c') x^2 + 2x + 5 < 0$$

$x \in \emptyset$

$$a > 0$$

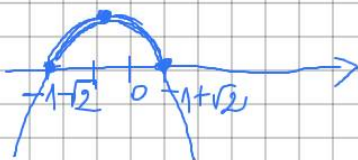
$$d) -x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$\Delta = 8 > 0 \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 4} = 2\sqrt{2} \quad a = -1 \quad b = -2$$

$$x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{-2} = -1 + \sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{-2} = -1 - \sqrt{2}$$

$$x_2 < x_1$$



odp. $x \in [-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}]$

$$\text{Zad. 1. d) } f(x) = |-x^2 - 2x + 1| \rightarrow \text{rysunek}$$

e) $|x^2 - x| \leq x$

wi. $|x| \leq a \Leftrightarrow (x \leq a \wedge x \geq -a)$

$$|x^2 - x| \leq x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x \leq x \\ x^2 - x \geq -x \end{cases}$$

$$x^2 - x \leq 0 \quad \wedge \quad x^2 \geq 0$$

$$x(x-2) \leq 0$$



$$x \in [0, 2] \quad \wedge \quad x \in \mathbb{R}$$

$$x \in [0, 2] \cap \mathbb{R}$$

odp. $x \in [0, 2]$

wi. $|x| > a \Leftrightarrow (x > a \vee x < -a)$

f) $|x+2| > x^2$

$$x+2 > x^2 \quad \vee \quad x+2 < -x^2$$

$$x^2 - x - 2 < 0 \quad \vee \quad x^2 + x + 2 < 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

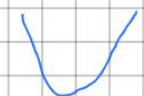
$$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1$$

$$x_2 = 2$$



$$\Delta = 1 + 8 = 9 < 0$$

$$a > 0$$



$$x \in \emptyset$$

$$x \in (-1, 2) \vee x \in \emptyset$$

$$x \in (-1, 2) \cup \emptyset$$

odp. $x \in (-1, 2)$

