

Zbiory i działania na zbiorach.

Własności funkcji - część I.

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

$\emptyset$ - zbiór pusty

$\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych

$\mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych

$\mathbb{C}$ - zbiór liczb zespolonych

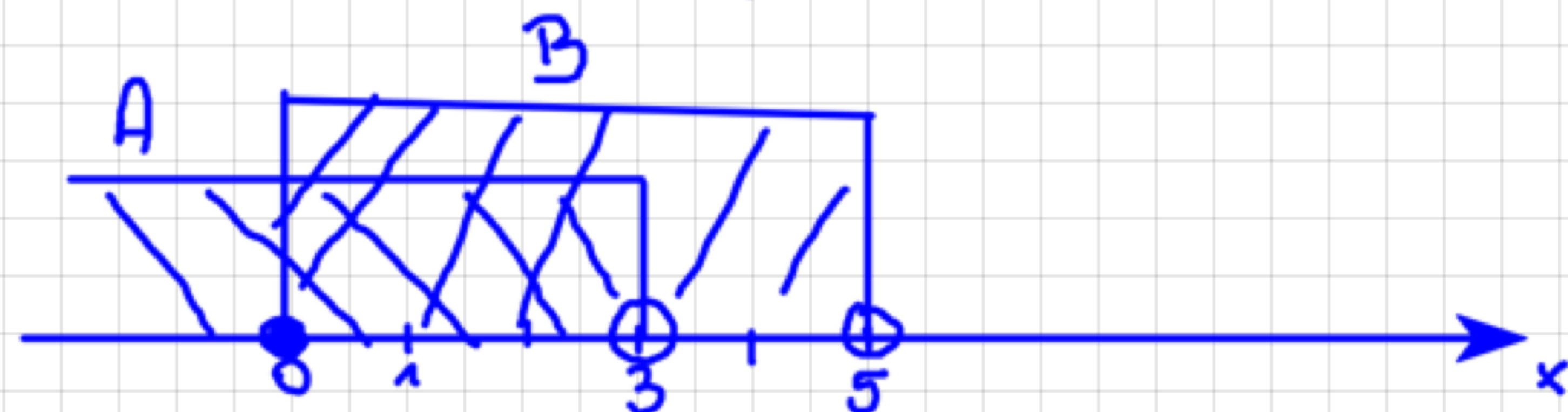
$\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych

$\mathbb{W}$ - zbiór liczb wymiernych

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{W}$ - zbiór liczb niewymiernych

Przykład Wyznacz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, goły

a) $A = (-\infty, 3)$, $B = \langle 0, 5 \rangle$

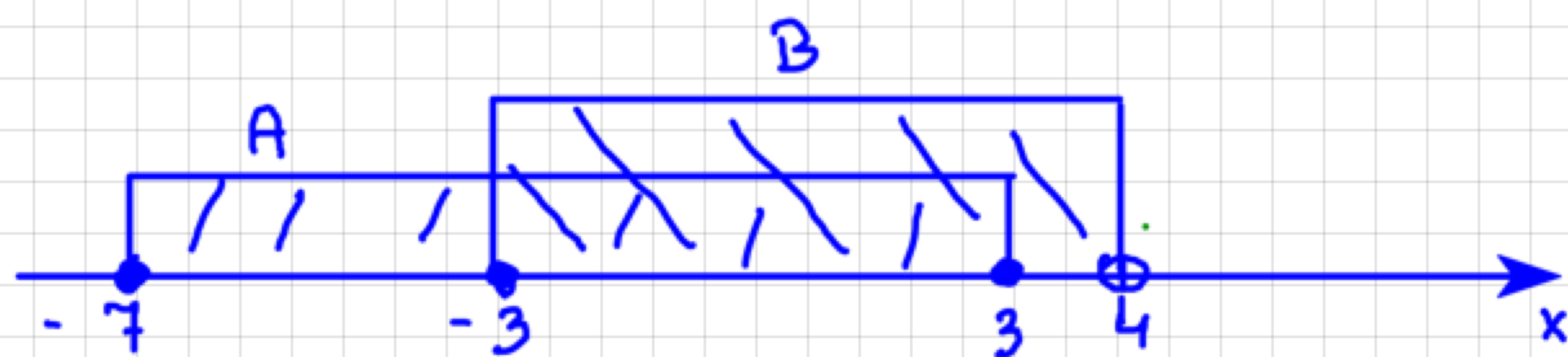


$$A \cup B = (-\infty, 5)$$

$$A \cap B = \langle 0, 3 \rangle$$

$$A \setminus B = (-\infty, 0)$$

b) $A = \langle -7, 3 \rangle$ $B = \langle -3, 4 \rangle$



$$A \cup B = \langle -7, 4 \rangle$$

$$A \cap B = \langle -3, 3 \rangle$$

$$A \setminus B = \langle -7, -3 \rangle$$

$$c) \quad A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \langle 0, 5 \rangle$$



$$A \cup B = B$$

$$A \cap B = A$$

$$A \setminus B = \emptyset$$

$$d) \quad A = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 2\} \quad , \quad B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$$

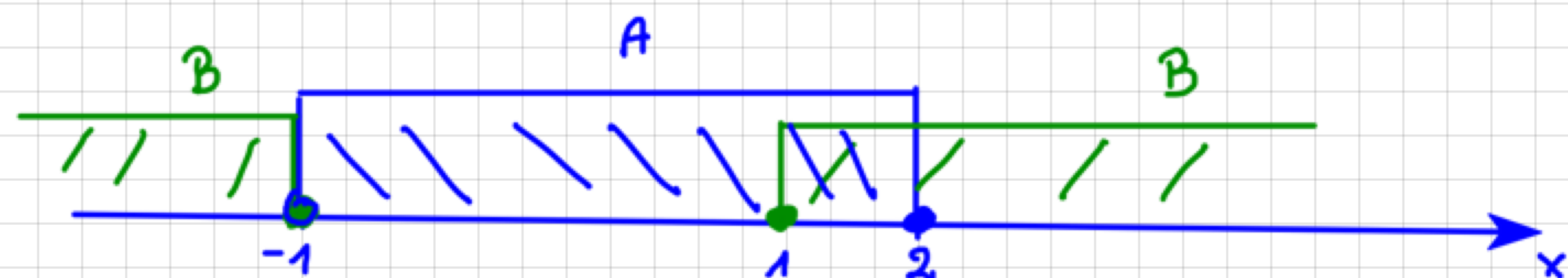
$$A : x \in \langle -1, 2 \rangle$$

$$B : |x| \geq 1 \Leftrightarrow (x \geq 1 \vee x \leq -1)$$

$$A = \langle -1, 2 \rangle$$



$$B = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$



$$A \cup B = \mathbb{R}$$

$$A \setminus B = (-1, 1)$$

$$A \cap B = \langle 1, 2 \rangle \cup \{-1\}$$

Własności funkcji

Definicja Funkcja określona na zbiorze $X \subset \mathbb{R}$ i przyjmująca wartości ze zbioru $Y \subset \mathbb{R}$ nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi $x \in X$ dokładnie jednego elementu $y \in Y$. Funkcję taką oznaczamy przez $f: X \rightarrow Y$.

Zbiór X nazywamy dziedziną funkcji f i oznaczać będziemy przez D_f . Elementy zbioru X nazywamy argumentami.

Zbiór Y nazywamy przeciwdziedziną funkcji f .

Brakto zbiór

$$\{ f(x) \in Y : x \in D_f \}$$

nazywamy zbiorem wartości funkcji i oznaczamy przez ZW_f .

Przykład Określić dziedzinę funkcji f oraz jej zbiór wartości.

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$$D_f = \mathbb{R} \quad ZW_f = \mathbb{R}$$

b) $f(x) = \sqrt{-x^2}$

$$D_f : -x^2 \geq 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$x^2 \leq 0$$

$$x = 0$$

$$D_f = \{0\} \quad ZW_f = \{0\}$$

d) $f(x) = \log(x^2 - 1)$

$$D_f : x^2 - 1 > 0$$

$$x = -1 \quad \vee \quad x = 1$$



$$D_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$ZW_f = \mathbb{R}$$

e) $f(x) = \frac{x^2}{|x|} > 0$

$$D_f : |x| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$ZW_f = (0, +\infty)$$

Definicja Funkcje $f: D_f \rightarrow Y$, $g: D_g \rightarrow Y$ są równe

wtedy i tylko wtedy, gdy $D_f = D_g$ oraz

$$\bigwedge_{x \in D_f} f(x) = g(x).$$

czytamy: dla każdego

Piszemy wtedy, że $f = g$.

Zadanie Zbawoły, czy podane funkcje są równe.

a) $f(x) = |x|$, $g(x) = \sqrt{x^2}$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$D_g: x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$D_f = D_g$$

Ponieważ $\bigwedge_{x \in D_f = D_g} f(x) = g(x)$

uwaga! $\sqrt{a^2} = |a|$

$$b) \quad f(x) = 1 - x$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{1-x^2}{1+x}$$

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$D_f \neq D_g \Rightarrow f \neq g$$

Zadanie Podaj dziedzinę funkcji:

$$a) \quad f(x) = \frac{x-3}{(x+2)(x-1)}$$

$$D_f : (x+2)(x-1) \neq 0$$

$$x+2 \neq 0 \quad \wedge \quad x-1 \neq 0$$

$$x \neq -2 \quad \wedge \quad x \neq 1$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$$

$$b) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}$$

$$D_f : x^2 - x \neq 0$$

$$x(x - 1) \neq 0$$

$$x \neq 0 \quad \wedge \quad x \neq 1$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

Do domu

$$c) f(x) = x \cdot \sqrt{x^2 - x - 2}$$

$$d) f(x) = \sqrt{\underbrace{16 - x^2}_{\geq 0}} + \sqrt{\underbrace{|x| - 1}_{\geq 0}}$$

$$e) f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-2}}$$

$$D_f : \frac{x}{x-2} \geq 0 \quad \wedge \quad x-2 \neq 0$$