

Zajęcia nr 4

13.10.2025r.

Wielomiany

Funkcję $w(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x^1 + a_0$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_+$ nazywamy wielomianem stopnia n .

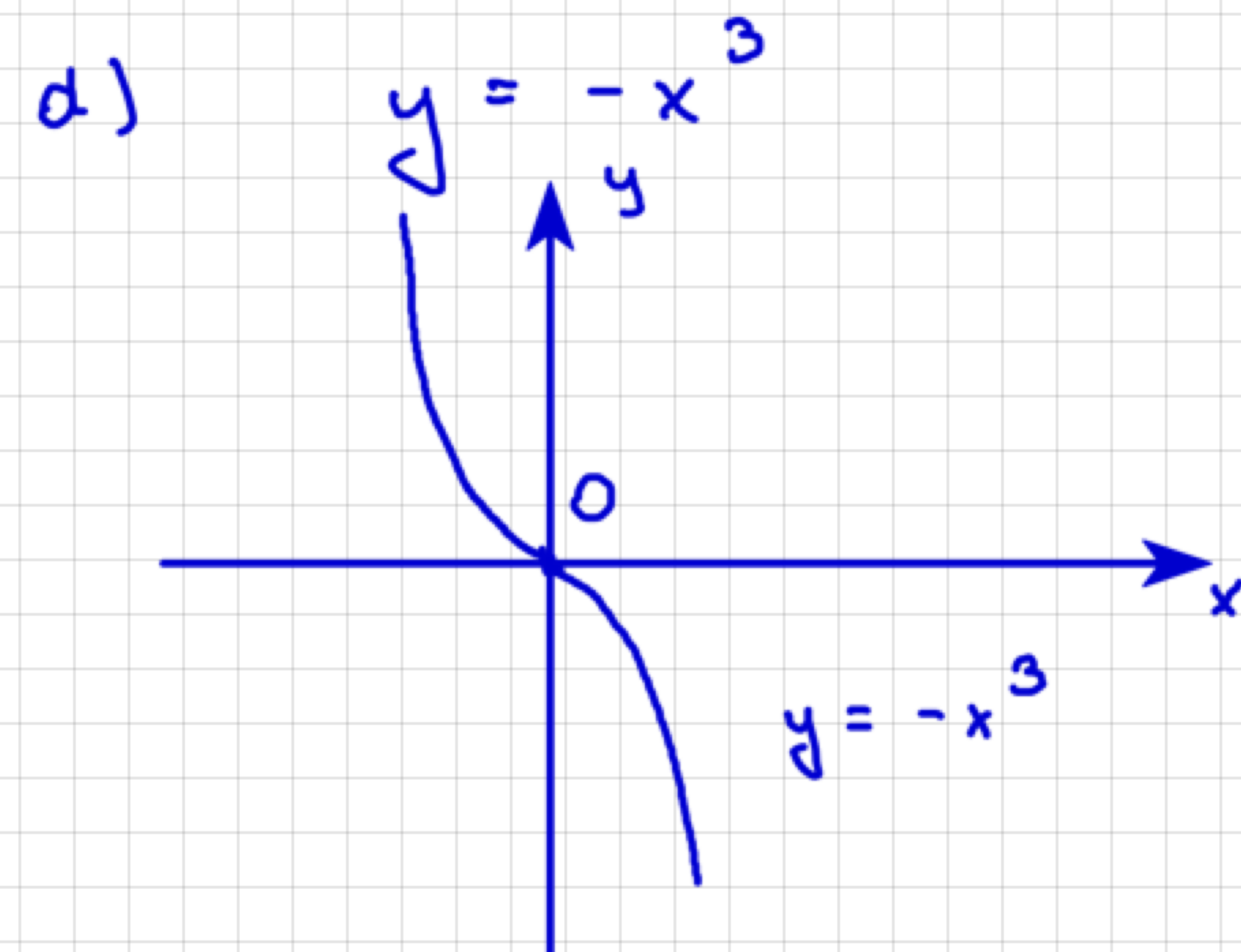
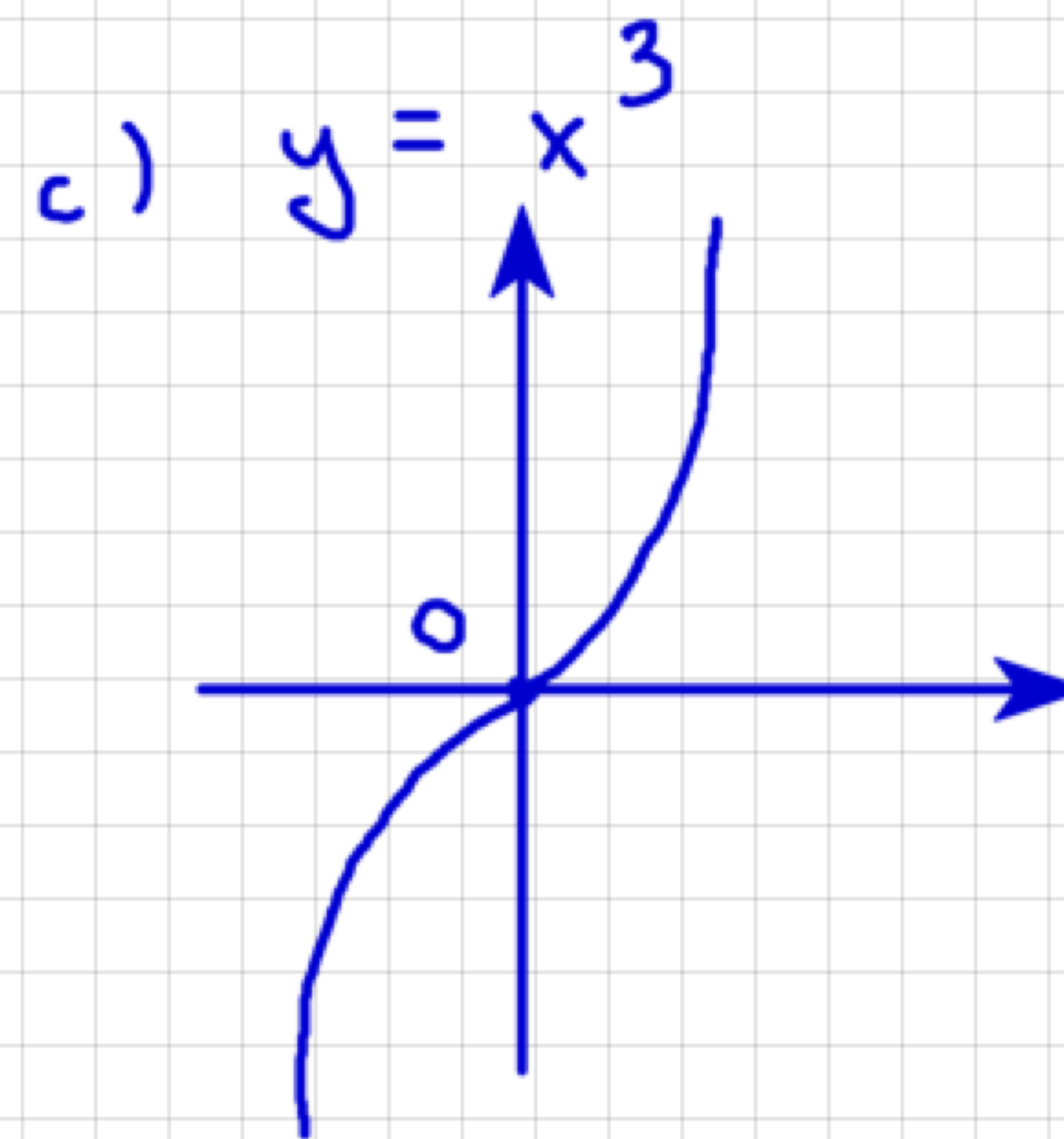
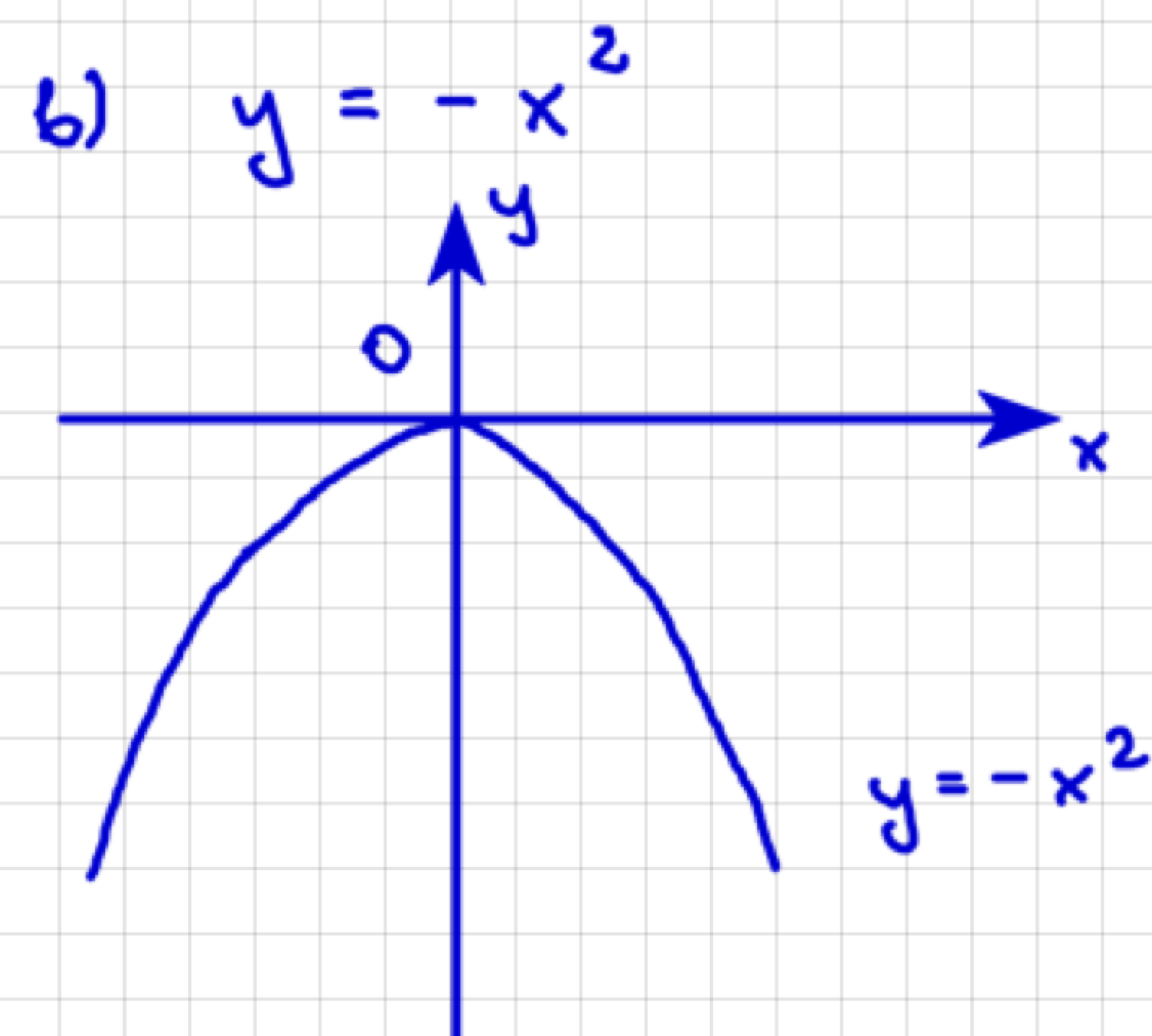
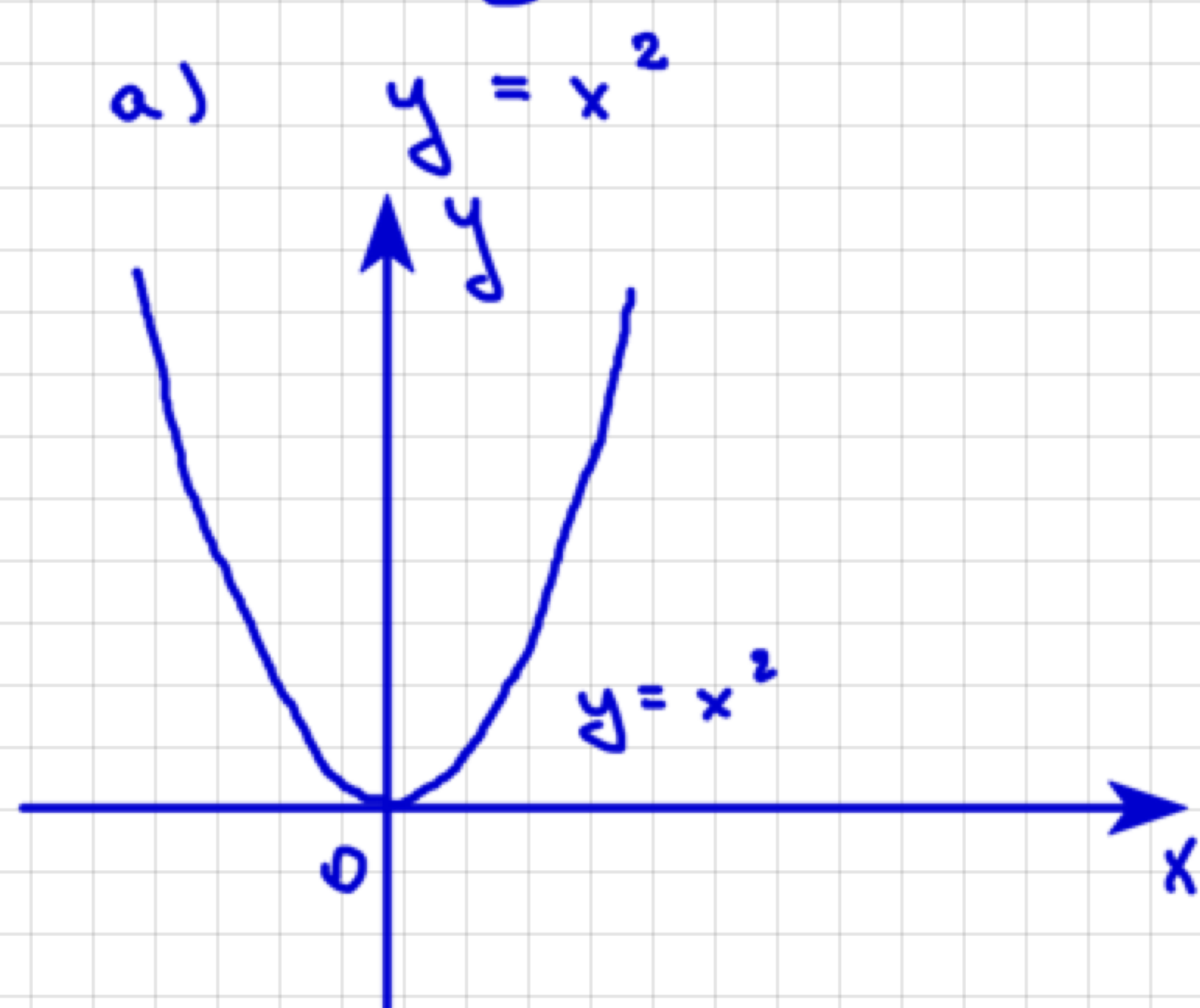
np. $w(x) = 5x^7 - 3x^3 + 2x^2$ $st(w) = 7$

$w(x) = x^2 - 3 \cdot x^4$ $st(w) = 4$

$w(x) = x \cdot (3-x) \cdot (x+2)$ $st(w) = 3$



Przypomnienie



Zadanie Rozwiąż równanie

$$1) (x-3)^1 \cdot (x+2)^1 = 0$$

$$x-3=0 \quad \vee \quad x+2=0$$

$$\text{odp. : } \begin{matrix} x=3 \\ (k=1) \end{matrix} \quad \vee \quad \begin{matrix} x=-2 \\ (k=1) \end{matrix}$$

$$2) \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad a=1, \quad b=-1, \quad c=-2$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9, \quad \sqrt{\Delta} = 3$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\vee$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{1-3}{2}$$

$\vee$

$$x_2 = \frac{1+3}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2}{2}$$

$\vee$

$$x_2 = \frac{4}{2}$$

$$x_1 = -1$$

$\vee$

$$x_2 = 2$$

$$\text{odp. : } \begin{matrix} x_1 = -1 \\ (k=1) \end{matrix}, \quad \begin{matrix} x_2 = 2 \\ (k=1) \end{matrix}$$

$$3) (x-7)^2 = 0$$

$$x-7=0$$

$$\underline{x=7}$$

(krotność podwójna $k=2$)

Zadanie Rozwiąż nierówność

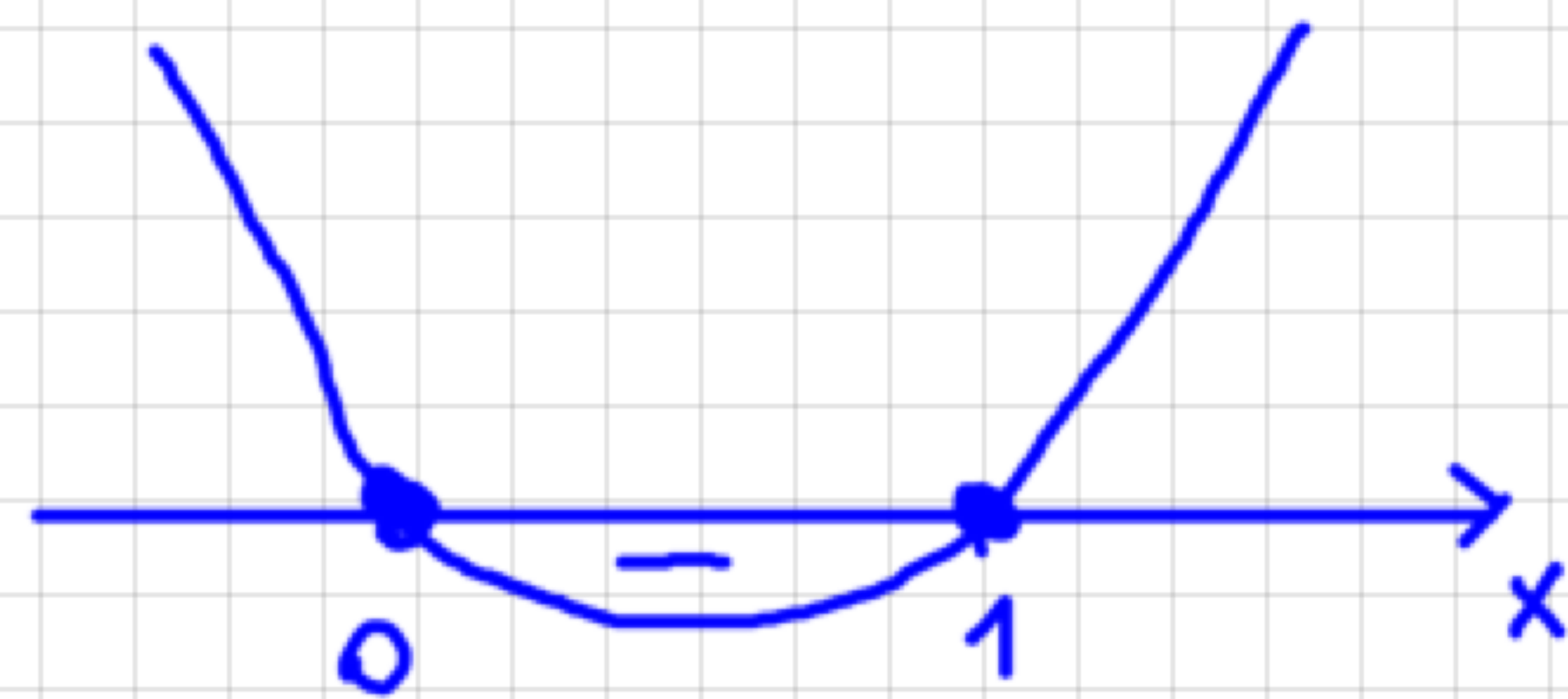
① $x^2 \leq x$

$$x^2 - x \leq 0$$

$$x \cdot (x - 1) \leq 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x - 1 = 0$$

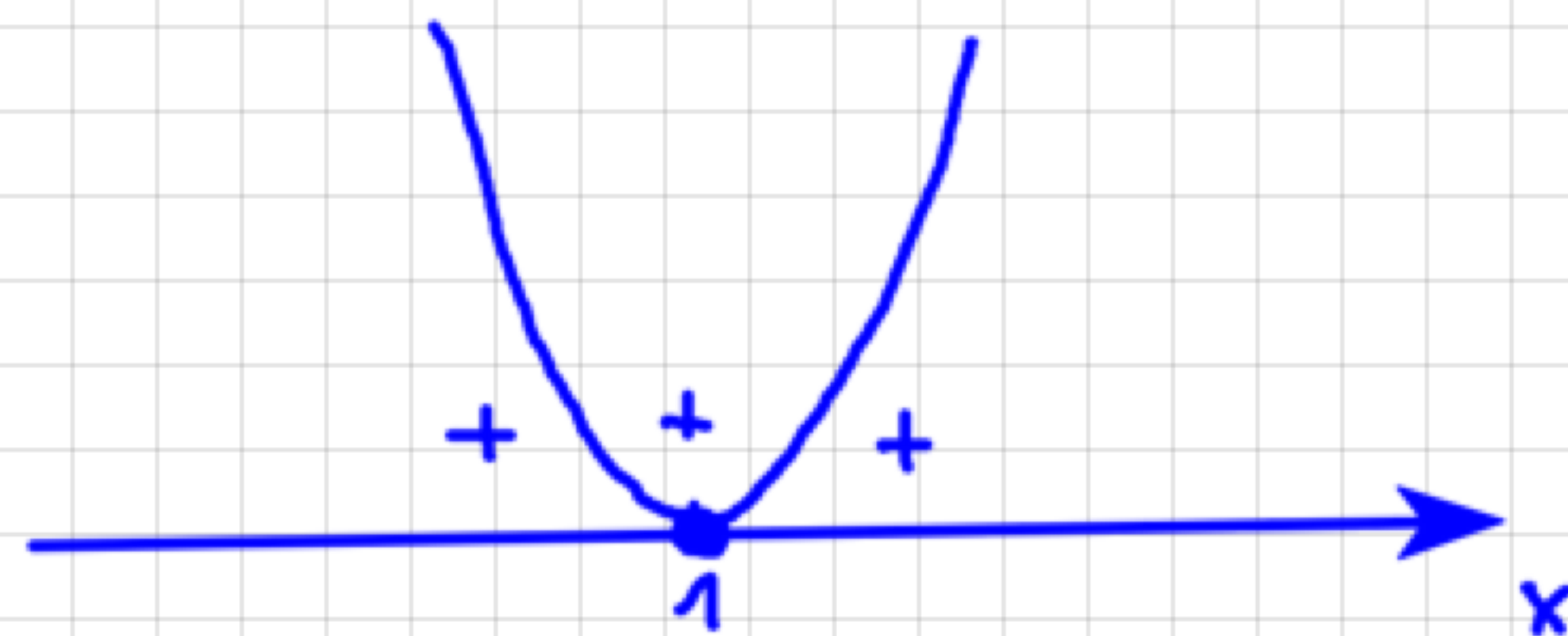
(k=1) $x = 0$ $x = 1$ (k=1)



odp.: $x \in \langle 0, 1 \rangle$

③ $(x - 1)^2 \leq 0$

$$x = 1 \quad (k=2)$$

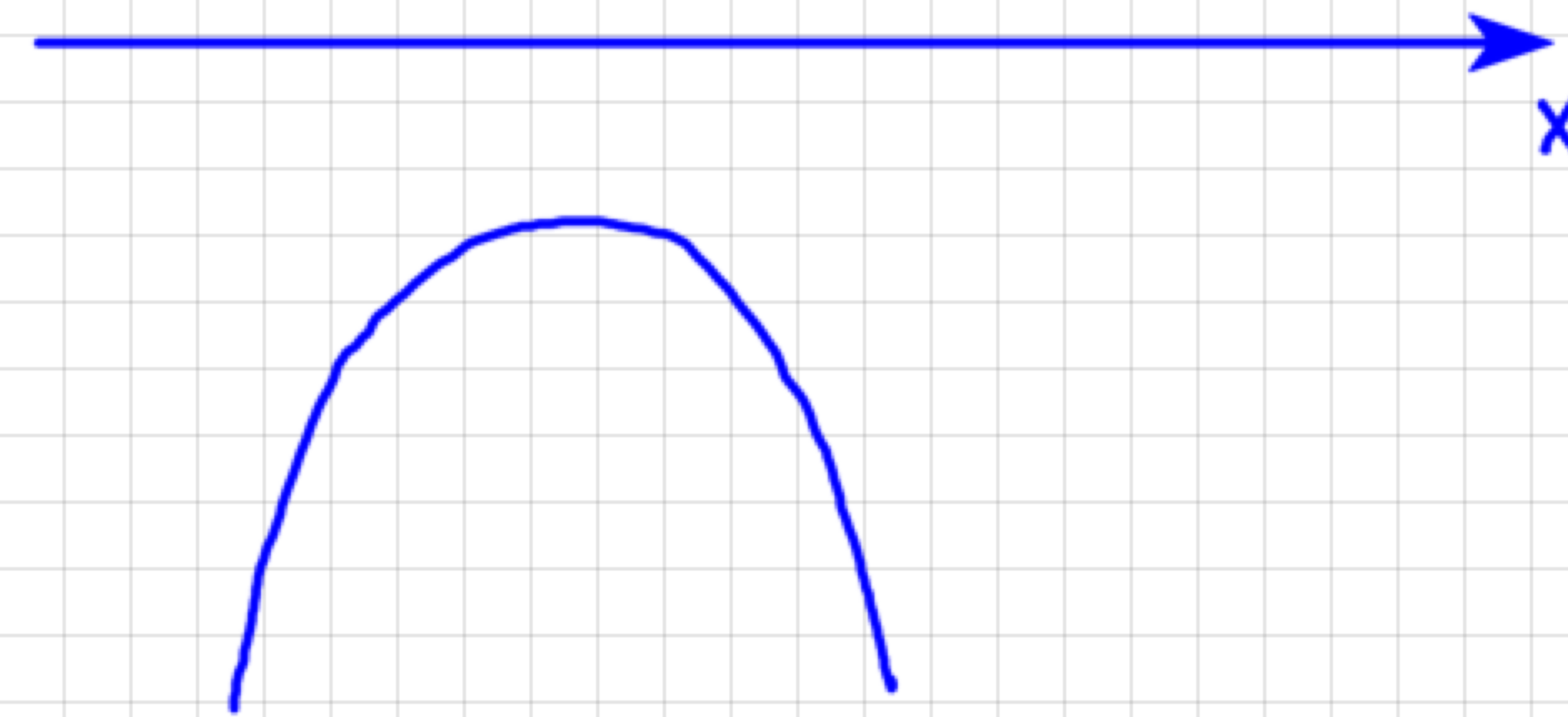


odp.: $x = 1$

② $-x^2 + x - 5 < 0$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5)$$

$$\Delta = 1 - 20 = -19 < 0$$



odp.: $x \in \mathbb{R}$

Zadanie

Rozwiąż równanie

a) $(2-x) \cdot (x+3) \cdot (4-x) = 0$

$$2-x=0 \quad \vee \quad x+3=0 \quad \vee \quad 4-x=0$$

$$2=x \quad \vee \quad x=-3 \quad \vee \quad 4=x$$

odp. : $x=2 \quad \vee \quad x=-3 \quad \vee \quad x=4$
(k=1) (k=1) (k=1)

b) $x^3 - x^2 = 0$

$$x^2 \cdot (x-1) = 0$$

$$x^2=0 \quad \vee \quad x-1=0$$

$$x=0 \quad \vee \quad x=1$$

$$(k=2) \quad (k=1)$$

c) $(2-x) \cdot (x-1)^2 \cdot (1-x)^4 \cdot (x-3) = 0$

$$2-x=0 \quad \vee \quad (x-1)^2=0 \quad \vee \quad (1-x)^4=0 \quad \vee \quad x-3=0$$

$$x=2 \quad \vee \quad x=1 \quad \vee \quad x=1 \quad \vee \quad x=3$$

(k=1) (k=6) (k=1)

$$d) \quad 5x^3 - 8x^2 - 5x + 2 = 0$$

Wypiszemy dzielniki wyrazu wolnego : $\pm 1, \pm 2$.

Oznaczamy przez $w(x) = 5x^3 - 8x^2 - 5x + 2$

$$w(1) = 5 \cdot 1^3 - 8 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 2 = 5 - 8 - 5 + 2 = -6 \neq 0$$

$$w(2) = 5 \cdot 2^3 - 8 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 2 = 5 \cdot 8 - 8 \cdot 4 - 10 + 2 = 40 - 32 - 8 = 0$$

$x = 2$ - pierwiastek wielomianu

Tw. (Bézout)

Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $w(x) \Leftrightarrow$ cały wielomian

ten jest podzielny przez $(x - a)$.

U was:

$$\begin{array}{r} 5x^2 + 2x - 1 \\ \hline (5x^3 - 8x^2 - 5x + 2) : (x - 2) \\ - (5x^3 - 10x^2) \\ \hline = 2x^2 - 5x + 2 \\ - (2x^2 - 4x) \\ \hline = -x + 2 \\ - (-x + 2) \\ \hline = = \end{array}$$

$$W(x) = (5x^2 + 2x - 1) \cdot (x - 2)$$

$$(5x^2 + 2x - 1) \cdot (x - 2) = 0$$

$$5x^2 + 2x - 1 = 0 \quad \vee \quad x = 2$$

$$\Delta = 4 + 20$$

$$\Delta = 24, \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{6}$$

$$x_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{6}}{10}$$

$$\vee \quad x_2 = \frac{-2 + 2\sqrt{6}}{10}$$

$$\vee \quad x_3 = 2$$

$$\text{Ans. : } x_1 = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\sqrt{6}$$

$$\vee \quad x_2 = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\sqrt{6}$$

$$\vee \quad x_3 = 2$$