

Zajęcia nr 6

16.10.2025r.

Zadanie Rozwiąż równanie

$$a) \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 0$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x = 2 \notin D \quad \vee \quad x = -2 \in D$$

$$\text{Odp. : } x = -2$$

$$b) \frac{x^3 - x^2}{x - 3} = 0$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$x^3 - x^2 = 0$$

$$x^2 \cdot (x - 1) = 0$$

$$x = 0 \in D \quad \vee \quad x = 1 \in D$$

$$\text{Odp. : } x \in \{0, 1\}$$

$$c) \frac{x-2}{x^2} = \frac{1}{x}$$

$$x^2 \cdot 1 = (x-2) \cdot x$$

$$x^2 = x^2 - 2x$$

$$x^2 - 2x - x^2 = 0$$

$$-2x = 0$$

$$x = 0 \notin D$$

Odp.: Brak rozwiązań.

$$d) \frac{2x-2}{x+1} = \frac{2}{1}$$

$$(2x-2) \cdot 1 = 2(x+1)$$

$$\cancel{2x} - 2 = \cancel{2x} + 2$$

$$-2 = 2$$

Odp. Równanie sprzeczne

$$D : (x^2 \neq 0 \wedge x \neq 0) \Rightarrow x \neq 0$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Zadanie Rozwiąż nierówność

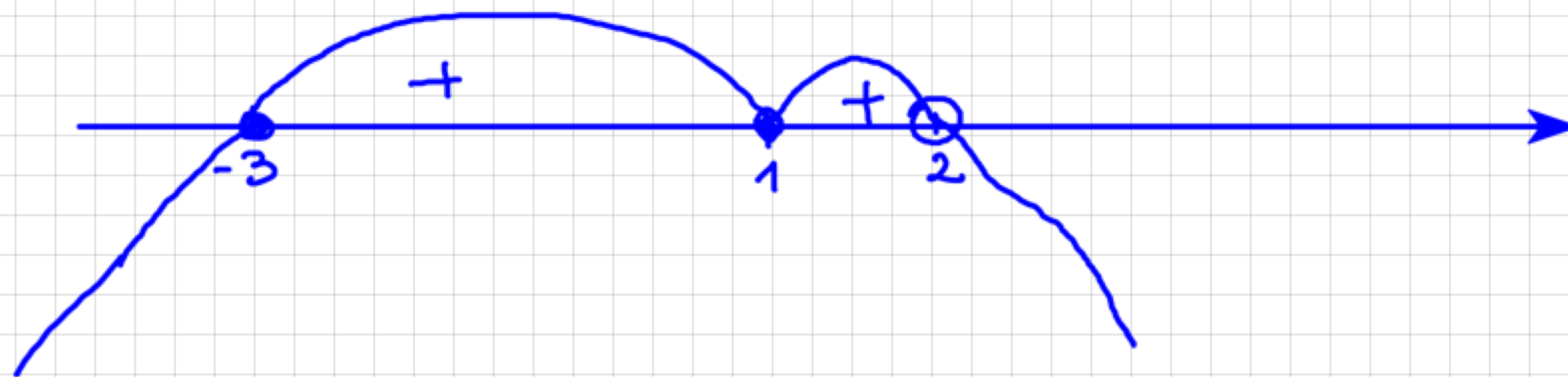
$$a) \frac{(x-1)^2 \cdot (x+3)}{(2-x)} \geq 0 \quad / \cdot (2-x)^2$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$(x-1)^2 \cdot (x+3)^1 \cdot (2-x)^1 \geq 0$$

$$\text{st}(w) = 4$$

$$(x-1)^2 = 0 \vee x+3 = 0 \vee 2-x = 0$$
$$\underline{x=1} \quad \vee \quad x = -3 \quad \quad x = 2$$



$$\text{Odp.: } x \in \langle -3, 2 \rangle$$

$$b) \frac{2x+7}{x-4} > 3$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$$

$$\frac{2x+7}{x-4} - 3 > 0$$

$$\frac{2x+7}{x-4} - \frac{3(x-4)}{x-4} > 0$$

$$\frac{2x+7-3x+12}{x-4} > 0$$

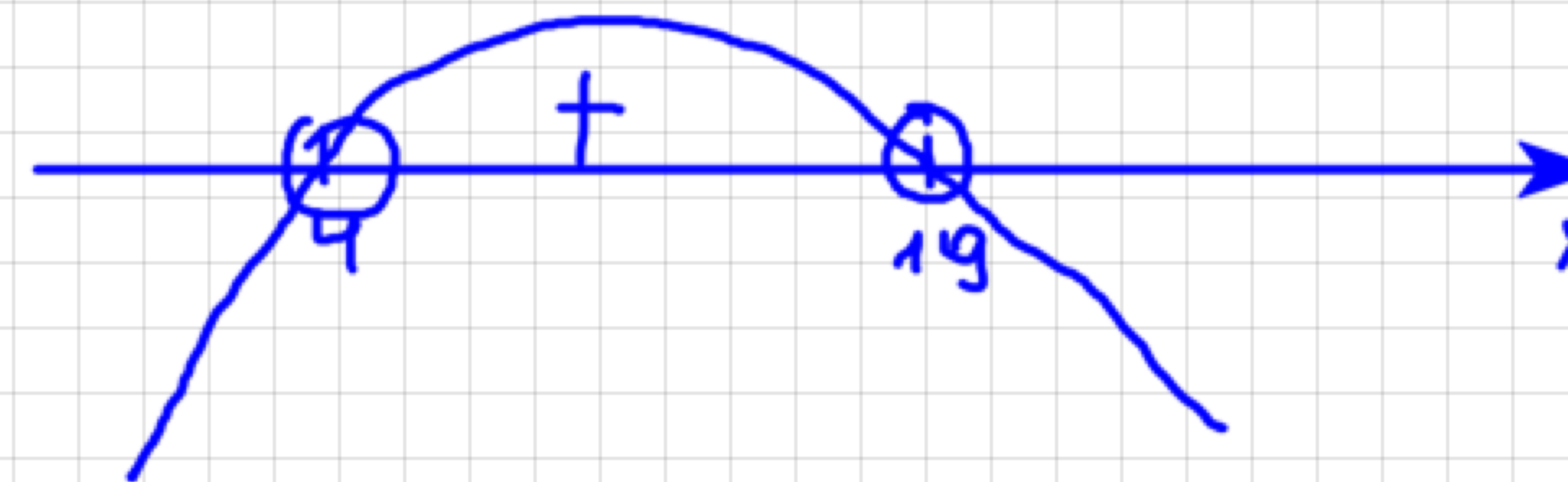
$$\frac{-x+19}{x-4} > 0$$

$$(-x+19) \cdot (x-4) > 0$$

$$-x+19=0 \quad \vee \quad x-4=0$$

$$x=19$$

$$x=4$$



$$\text{Solp. : } x \in (4, 19)$$

c)

$$\frac{x}{x-3} + \frac{x}{x+2} \geq 2$$

$$\frac{x \cdot (x+2) + x \cdot (x-3)}{(x-3) \cdot (x+2)} \geq 2$$

$$\frac{x^2 + 2x + x^2 - 3x}{(x-3) \cdot (x+2)} \geq 2$$

$$\frac{2x^2 - x}{(x-3)(x+2)} - 2 \geq 0$$

$$\frac{2x^2 - x}{(x-3)(x+2)} - \frac{2(x-3) \cdot (x+2)}{(x-3)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{2x^2 - x - 2(x^2 + 2x - 3x - 6)}{(x-3)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{2x^2 - x - 2(x^2 - x - 6)}{(x-3) \cdot (x+2)} \geq 0$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{3, -2\}$$

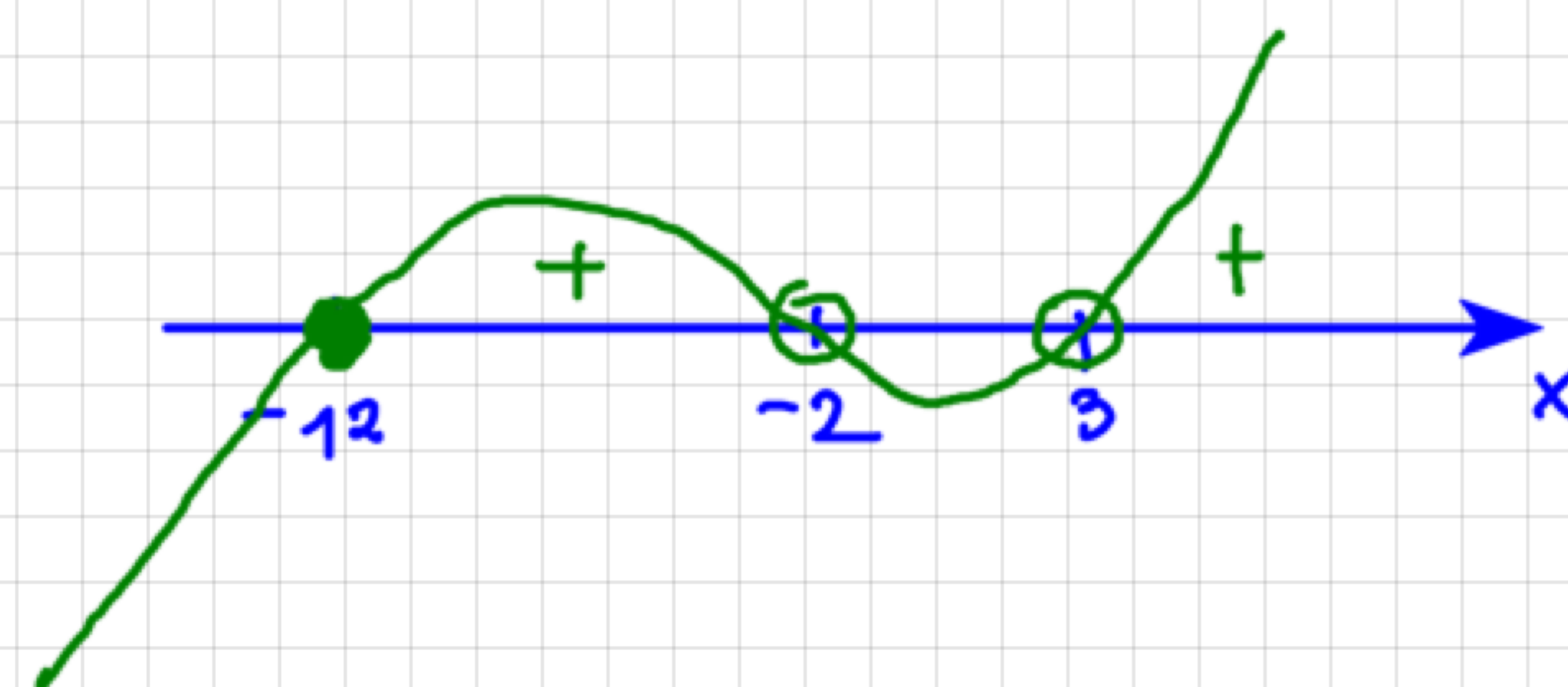
$$\frac{\cancel{2x^2} - x - \cancel{2x^2} + 2x + 12}{(x-3)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{x + 12}{(x-3)(x+2)} \geq 0$$

$$(x + 12) \cdot (x-3) \cdot (x+2) \geq 0$$

$$st(w) = 3$$

$$x = -12 \vee x = 3 \vee x = -2$$

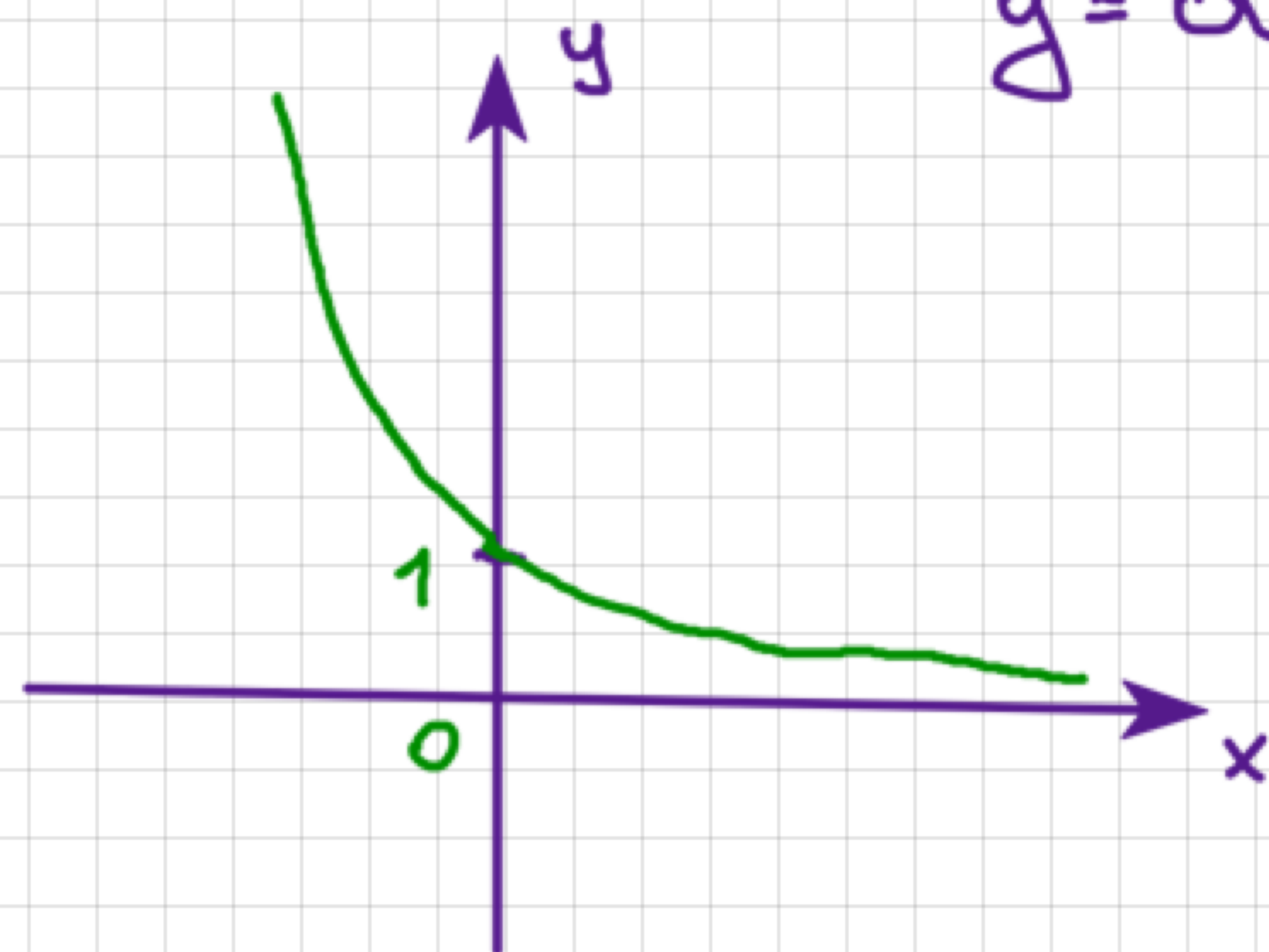


$$\text{Solp. : } x \in \langle -12, -2 \rangle \cup (3, +\infty)$$

Funkcja wykładnicza

Jest to funkcja postaci $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$

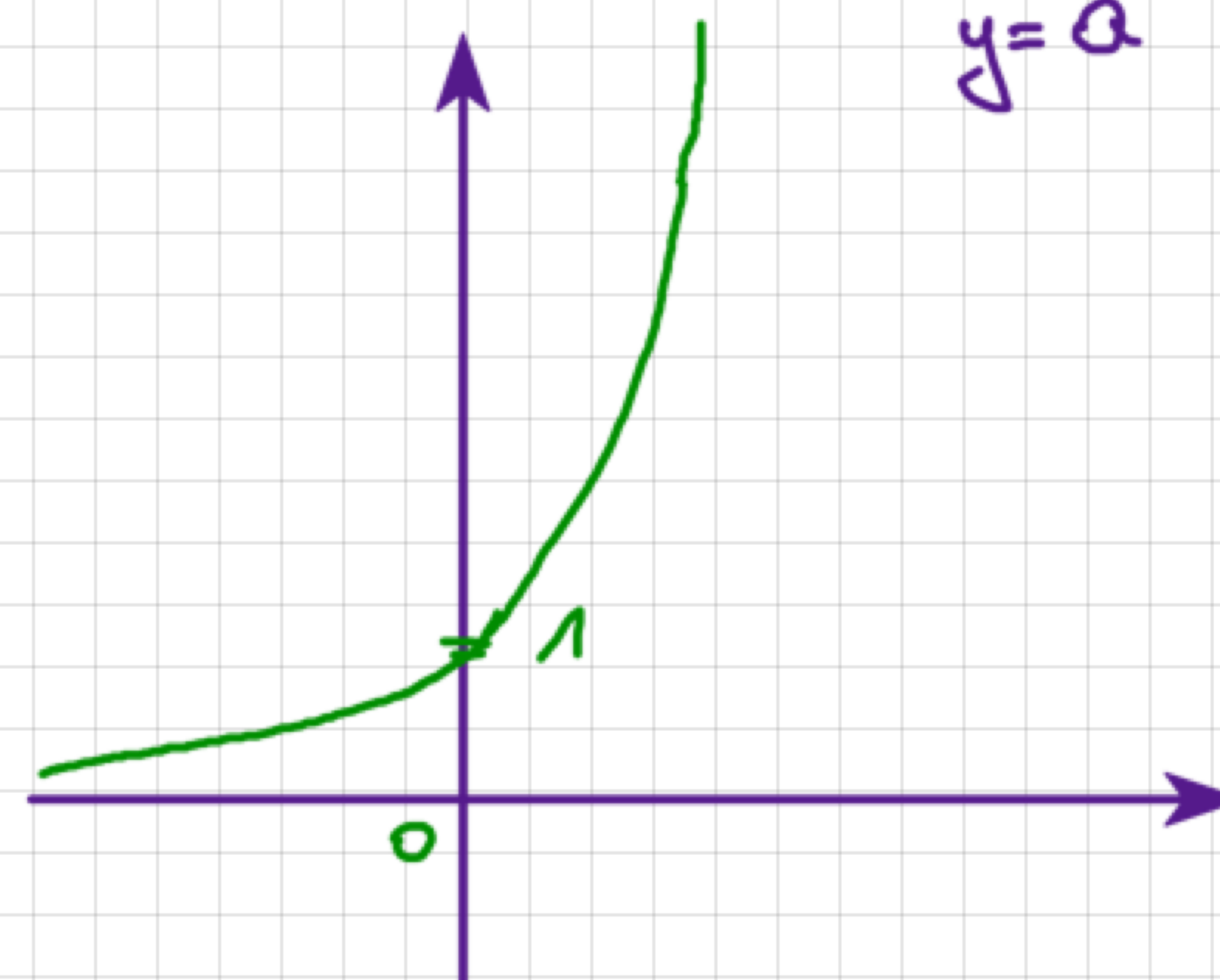
① $a \in (0, 1)$ $y = a^x$



f. malejąca

f. różnowartościowa

② $a > 1$ $y = a^x$



f. rosnąca

f. różnowartościowa

Def.

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in D_f} (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

Zadanie

Rozwiąż równanie

$$[p \Rightarrow q] \Leftrightarrow [(\sim q) \Rightarrow (\sim p)]$$

a) $2^{3-x} = 4$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}$$

$$2^{3-x} = 2^2$$

Z równościowości p. wykładniczej

$$3 - x = 2$$

$$3 - 2 = x$$

odp.: $x = 1$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot 4^{2x} = 16$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}$$

$$(2^{-1})^x \cdot (2^2)^{2x} = 2^4$$

$$2^{-x} \cdot 2^{4x} = 2^4$$

$$2^{-x+4x} = 2^4$$

$$2^{3x} = 2^4$$

$$3x = 4$$

$$\underline{x = \frac{4}{3}}$$

Zadanie

Rozwiąż nierówność:

$$a) \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{x+4} \quad D = \mathbb{R}$$

Z monotoniczności f. wykładniczej

$$2-x \leq x+4 \quad (\text{bo w podstawie jest } \frac{1}{3})$$

$$-x - x \leq 4 - 2$$

$$-2x \leq 2 \quad | : (-2)$$

$$x \geq -1$$

$$\text{Odp. : } x \in [-1, +\infty)$$

$$b) \quad 4^x > 4^{2-x} \quad D = \mathbb{R}$$

Z monotoniczności f. wykładniczej:

$$x > 2-x \quad (\text{bo w potęgach jest liczba 4})$$

$$x + x > 2$$

$$2x > 2 \quad | :2$$

$$x > 1$$

$$\text{Odp. : } x \in (1, +\infty)$$

15 domni Rozwiąz

$$1) 9^x - 3^{x-2} > 0$$

$$2) \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} \cdot 4^x \leq 2^{x-1}$$

$$3) 2^{x^2} \cdot (0,5)^{2x+0,5} > \frac{1}{\sqrt{8}}$$

$$4) 4^{\frac{2}{x+3}} > 1$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$