

20.10.2025r.

Def. logarytmu

Logarytmem o podstawie a z liczby b nazywamy taką liczbę c że $a^c = b$, przy założeniu, że $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

$$\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ b > 0 \end{cases}$$

a - podstawa logarytmu

b - liczba logarytmowana

np. 1) $\log_2 8 = 3$, bo $2^3 = 8$

2) $\log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$, bo $(\frac{1}{2})^0 = 1$

3) $\log_4 4 = 1$, bo $4^1 = 4$

$$\log_{\sqrt{2}} 8 = x$$

$$(\sqrt{2})^x = 8$$

$$(2^{\frac{1}{2}})^x = 2^3$$

$$2^{\frac{1}{2}x} = 2^3$$

$$\frac{1}{2}x = 3 \quad | \cdot 2$$

$$x = 6$$

spr. $(\sqrt{2})^6 =$
 $= (2^{\frac{1}{2}})^6 = 2^3 = 8$

$$4) \quad 2^x = 5 \quad / \log_2$$

$$\log_2(2^x) = \log_2 5$$

$$x \cdot \log_2 2 = \log_2 5$$

$$x \cdot 1 = \log_2 5$$

$$\underline{x = \log_2 5}$$

$$5) \quad 3^x = 7$$

z def. logarytmu

$$x = \log_3 7$$

(operacje przytóżenia logarytmu)

Własność: $\log_a(b^x) = x \cdot \log_a b$

$$6) \quad 4^x = 11$$

$$x = \log_4 11$$

Własności logarytmów:

$$\textcircled{1} \quad \log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y) \quad , \quad x, y > 0 \quad , \quad a > 0 \quad , \quad a \neq 1$$

$$\textcircled{2} \quad \log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y} \quad , \quad x, y > 0 \quad , \quad a > 0 \quad , \quad a \neq 1$$

$$\textcircled{3} \quad \log_a (x^L) = L \cdot \log_a x \quad , \quad x > 0 \quad , \quad a > 0 \quad , \quad a \neq 1 \quad , \quad L \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{4} \quad \log_{(a^p)} (x^L) = \frac{L}{p} \cdot \log_a x \quad , \quad x > 0 \quad , \quad a > 0 \quad , \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad , \quad L \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{5} \quad a^{\log_a b} = b \quad , \quad a > 0 \quad , \quad a \neq 1 \quad , \quad b > 0 \quad \boxed{\text{np. } 3^{\log_3 5} = 5}$$

$$\textcircled{6} \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad , \quad a > 0 \quad , \quad a \neq 1 \quad , \quad b > 0 \quad \wedge \quad (\log_b a \neq 0 \Leftrightarrow b^0 \neq a \Leftrightarrow a \neq 1)$$

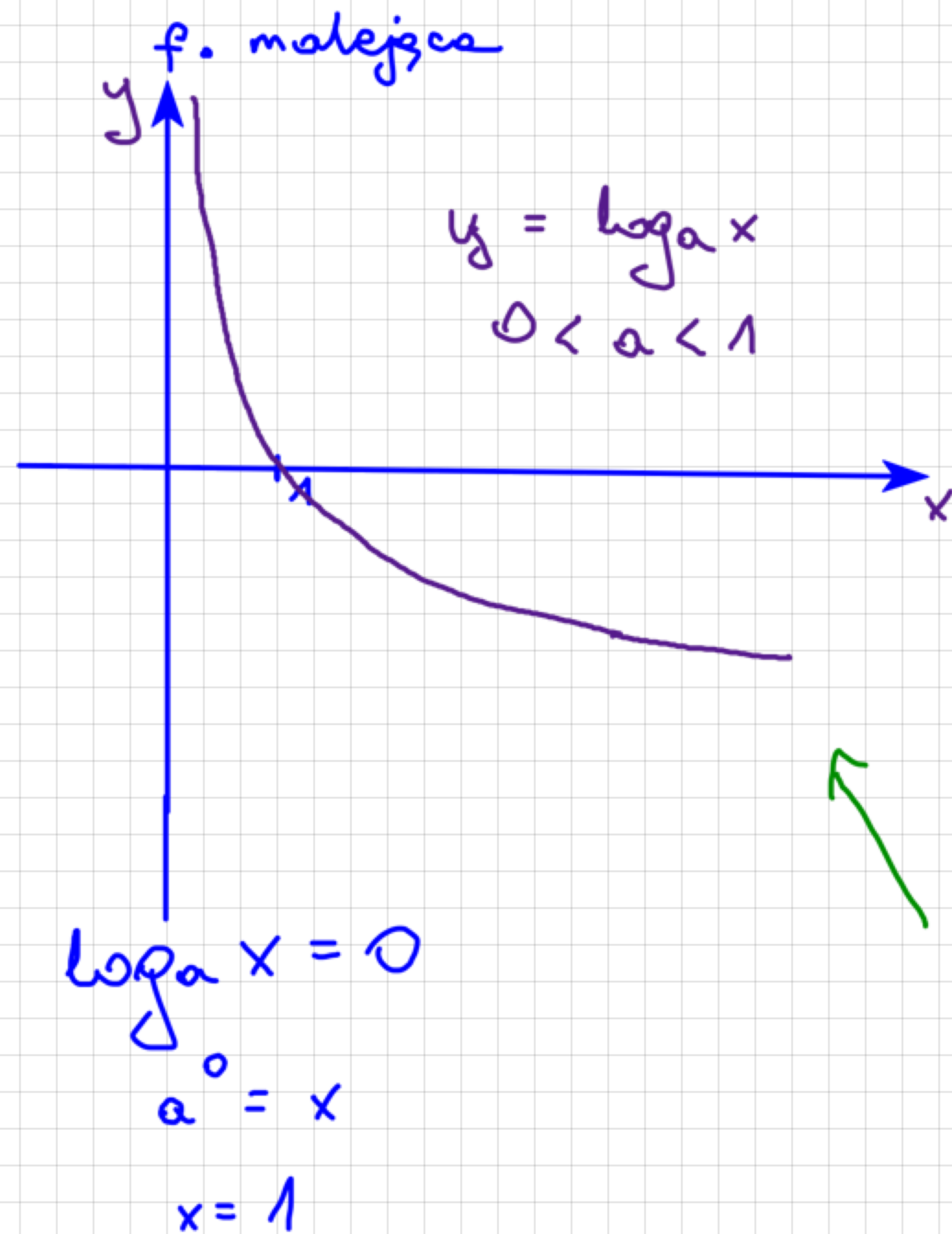
$$\textcircled{7} \quad (\text{O nowej postacie logarytmu}) \quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad , \quad a > 0 \quad , \quad a \neq 1 \quad , \quad b > 0 \quad , \quad c > 0 \quad , \quad c \neq 1$$

($\log_c a \neq 0 \Leftrightarrow c^0 \neq a \Leftrightarrow a \neq 1$)

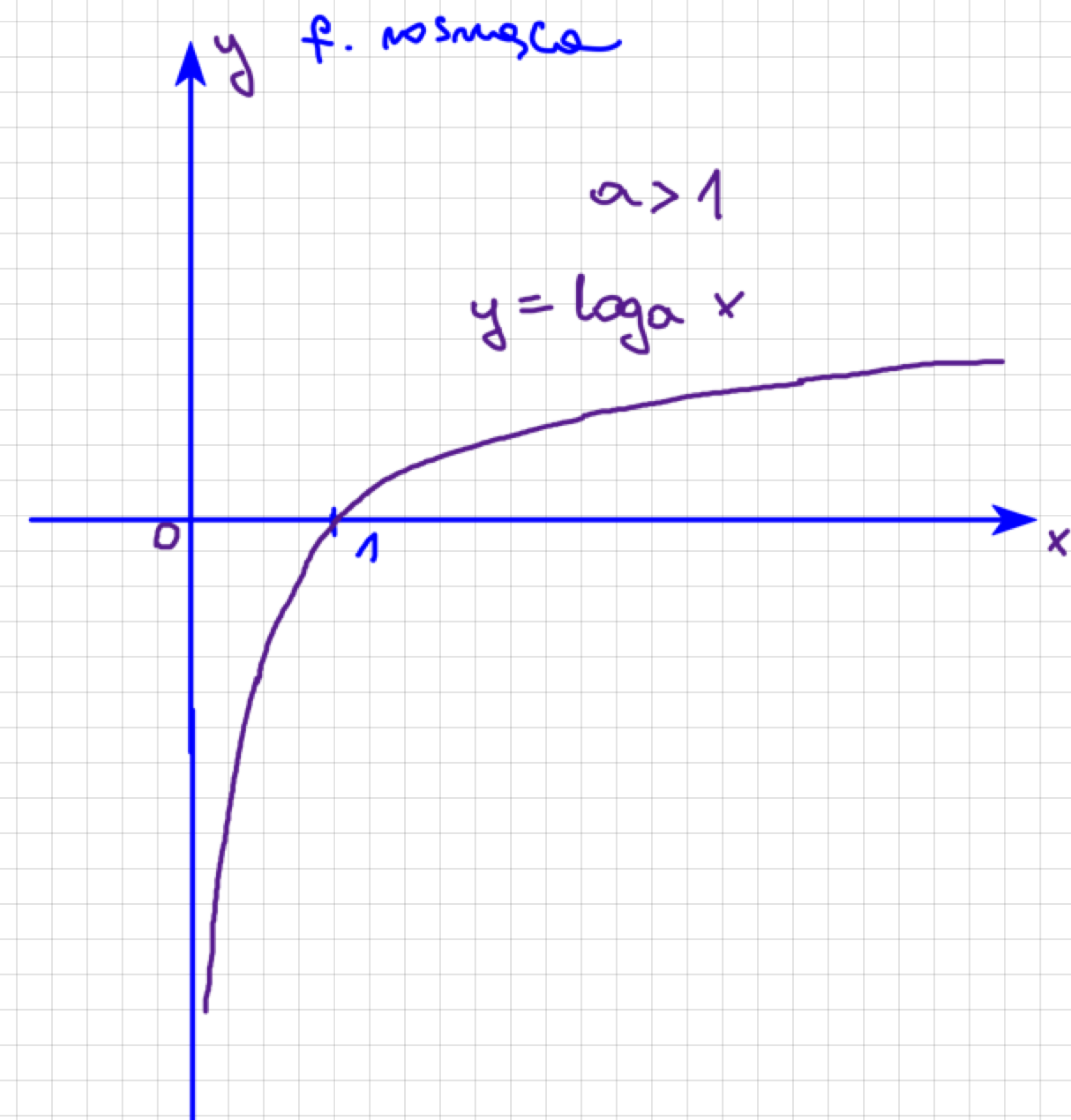
Funkcja logarytmiczna to funkcja postaci:

$$f(x) = \log_a x, \quad a > 0, a \neq 1, x > 0$$

① $a \in (0, 1)$

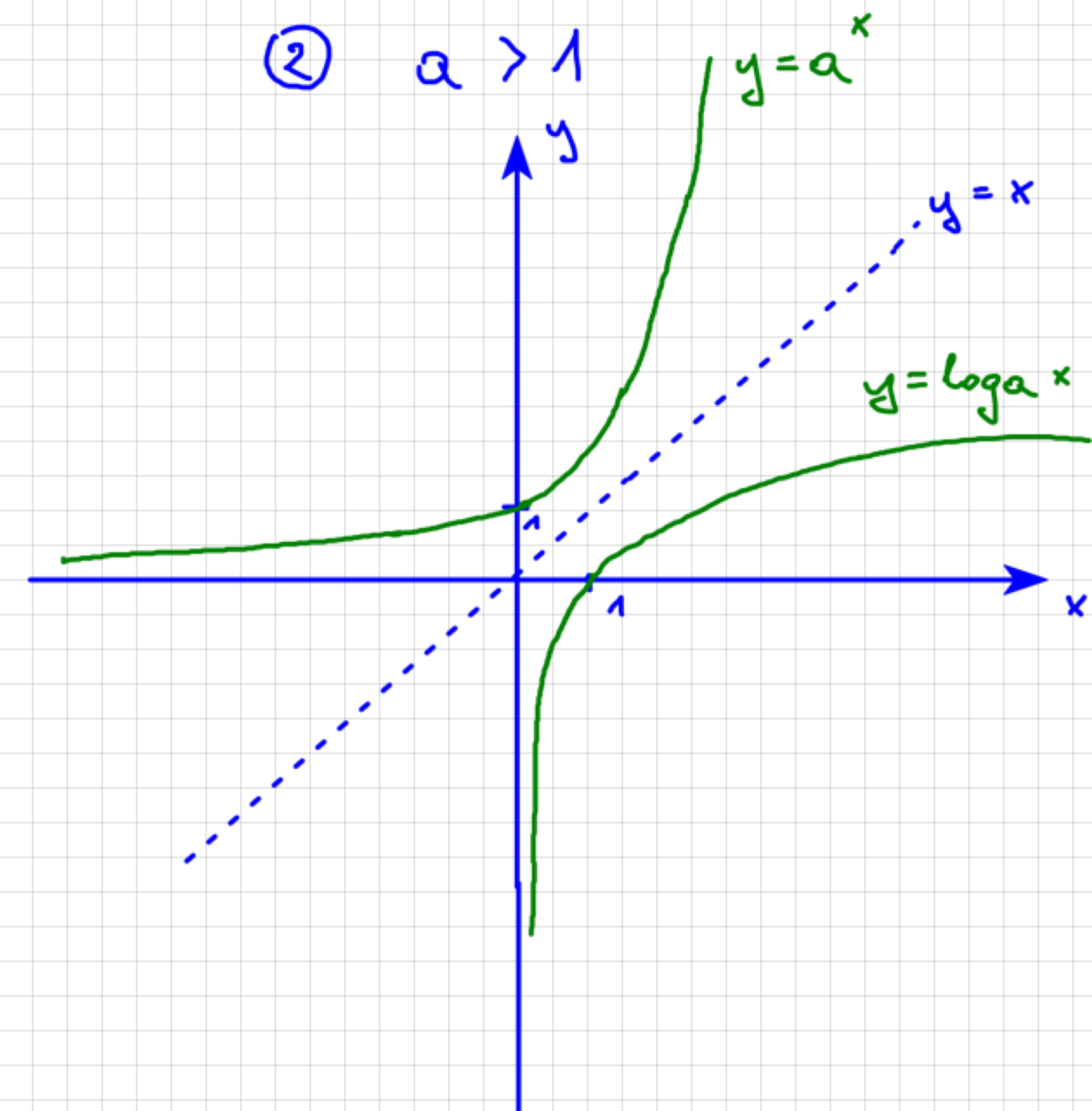
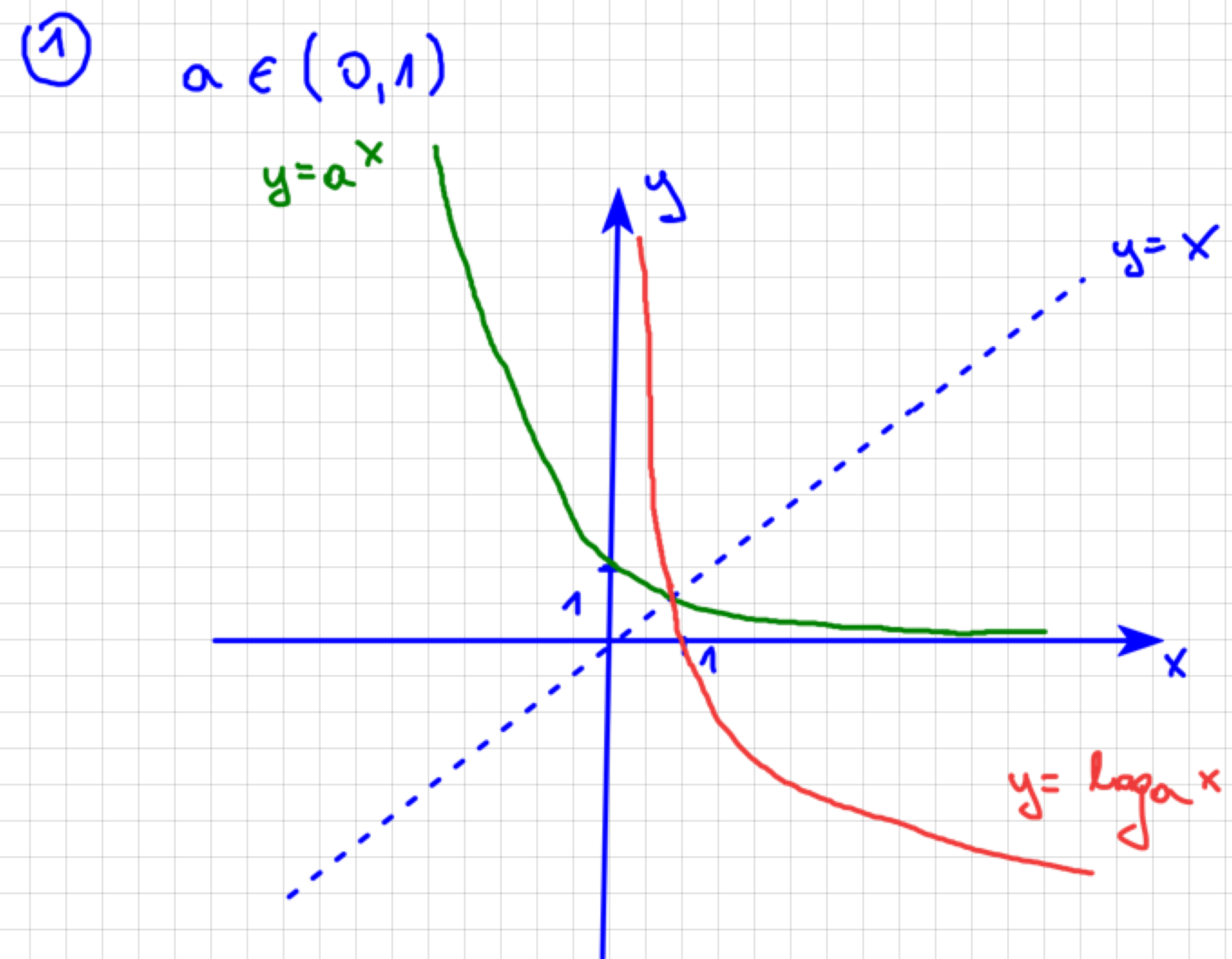


② $a > 1$



funkcja wzajemnościowa

Funkcja wykładnicza i logarytmiczna to funkcje wzajemnie do siebie odwrotne (ich wykresy są symetryczne względem prostej $y = x$).



Przykłady

Rozwiązujemy równania:

1) $\log_2 x = 4$ $D_r : x > 0$

I sposób (z def. logarytmu)

$$2^4 = x$$

odp.: $x = 16 \in D$

II sposób $\log_2 x = 4$

$$\log_2 x = \log_2 (2^4)$$

$$\log_2 x = \log_2 16$$

Z równoważności f. logarytmicznej.

odp.: $x = 16 \in D$

2) $\log_3 (2-x) = 4$

$D_r : 2-x > 0$

$$-x > -2 \quad | \cdot (-1)$$

$$x < 2$$

$$x \in (-\infty, 2)$$

Z def. logarytmu:

$$3^4 = 2-x$$

$$81 = 2-x$$

$$x = 2-81$$

odp.: $x = -79 \in (-\infty, 2)$

Przykłady

Rozwiążemy nierówność:

$$1) \quad \log_3(5-x) \leq 2$$
$$\log_3(5-x) \leq \log_3(3^2)$$

$$\log_3(5-x) \leq \log_3 9$$

Z monotoniczności f. logarytmicznej

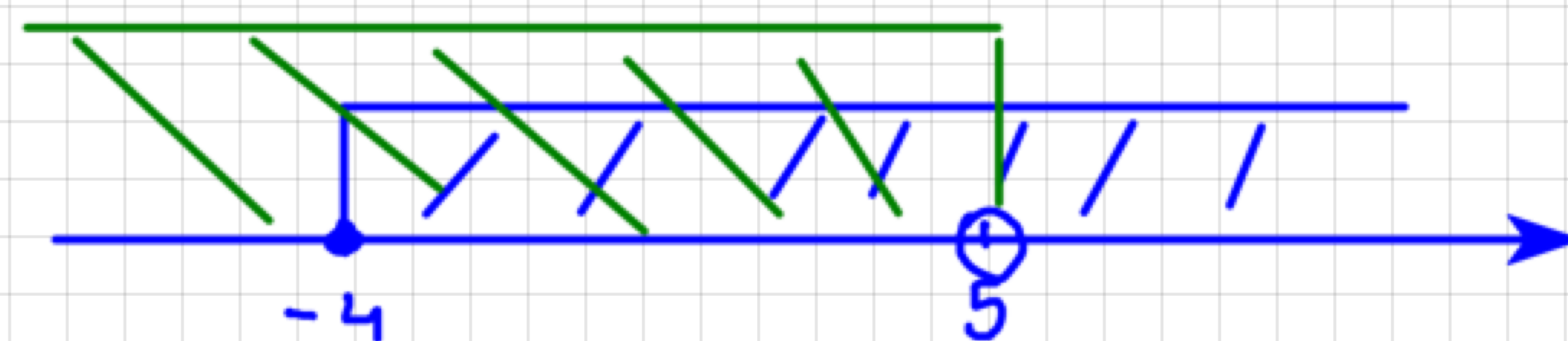
$$5-x \leq 9$$

$$-x \leq 4 \quad | \cdot (-1)$$

$$x \geq -4$$

(zachowujemy znak nierówności, bo w podstawie logarytmu jest liczba 3, która jest większa od 1)

Uzyskaliśmy $D_N = (-\infty, 5)$



$$\text{Odp: } x \in [-4, 5)$$

$$D_N: \quad 5-x > 0$$

$$5 > x$$

$$x < 5$$

$$x \in (-\infty, 5)$$