

1 Asymptoty (cz.1)

Definicja. Niech $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $X = (-\infty, x_0) \cup (x_0, +\infty)$

1) Prosta o równaniu $x = x_0$

nazywamy **asymptotą pionową** $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$ i $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$.
wykresu funkcji f , gdy

2) Prosta o równaniu $y = b$

nazywamy **asymptotą poziomą** $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$.
wykresu funkcji f w $\pm\infty$, gdy

3) Prosta o równaniu $y = ax + b$

nazywamy **asymptotą ukośną** $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax - b) = 0$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - b) = 0$.
wykresu funkcji f w $\pm\infty$, gdy

Twierdzenie. Niech $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Prosta o równaniu $y = ax + b$

jest asymptotą ukośną wykresu funkcji w $+\infty$ $\iff a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ i $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$

Analogiczne twierdzenie zachodzi dla asymptoty ukośnej w $-\infty$.

Zadanie. Wyznaczyć asymptoty wykresu funkcji f . Jak mógłby wyglądać wykres funkcji f ?

1) $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$

$D = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

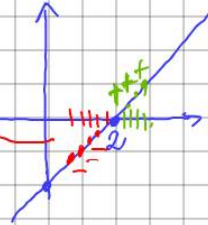
• As. pionowe

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \left[\frac{4}{0^-} \right] = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \left[\frac{4}{0^+} \right] = +\infty$

$x=2$
as. pionowa
dwustronna

$y = x - 2$



• As. poziome

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x-2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot x}{x(1 - \frac{2}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 - \frac{2}{x}} = \left[\frac{\infty}{1} \right] = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \left[\frac{-\infty}{1} \right] = -\infty$

brak asympt. poziomych

• As. ukośne

$y = ax + b$

$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{x-2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \frac{1}{x}}{x(1 - \frac{2}{x})} = \frac{1}{1} = 1$

$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x-2} = \frac{2}{1} = 2$

$y = x + 2$ - asymptota ukośna w $+\infty$
 $-\infty$

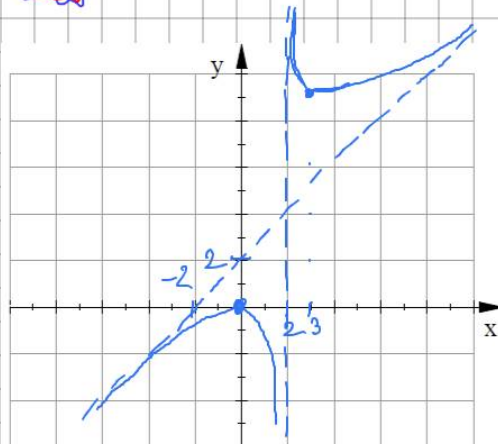
$(-\infty)$ Analogiczne obliczenia

Uwaga! Asymptoty ukośne mogą być różne w $+\infty$ i $-\infty$

Jak może wyglądać wykres f ?

! Zarzynamy od naskicowania asymptot

$f(0) = 0$ $f(3) = \frac{9}{3-2} = 9$



$$2) f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x}$$

$$\Delta: x^2 - 2x \geq 0$$

$$x(x-2) \geq 0$$



$$\Delta = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$$

• Asymptoty pionowe

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= [0 + \sqrt{0}] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= [2 + \sqrt{0}] = 2 \end{aligned} \right\} \text{brak asymptot pionowych}$$

• Asymptoty poziome

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x^2 - 2x}) = [\infty + \infty] = (+\infty) \Rightarrow \text{brak as. poziomej w } +\infty \text{ (bedziemy szukac poziome as. ukladajac w } +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - 2x}) = [-\infty + \infty] = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - 2x}) \cdot \frac{x - \sqrt{x^2 - 2x}}{x - \sqrt{x^2 - 2x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - (x^2 - 2x)}{x - \sqrt{x^2 - 2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x - \sqrt{x^2 - 2x}} = \left[\frac{-\infty}{-\infty} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \cdot x}{x - \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{2}{x}\right)}} = \left\{ \begin{aligned} & \sqrt{x^2} = |x| = -x \text{ dla } x < 0 \end{aligned} \right\} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x - (-x)\sqrt{1 - \frac{2}{x}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \cdot x}{x(1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}})} = \left[\frac{2}{1+1} \right] = 1 \Rightarrow y=1 - \text{as. pozioma w } -\infty \text{ (ukladajac)}$$

• As. ukladajac (+∞)

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 - 2x}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{2}{x}\right)}}{x} \right) = \left\{ \begin{aligned} & \sqrt{x^2} = |x| = x \text{ dla } x > 0 \end{aligned} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x\sqrt{1 - \frac{2}{x}}}{x} \right) = [1 + \sqrt{1-0}] = 2$$

$$a=2 \text{ i } b=-1, \text{ to}$$

$$y=2x-1 - \text{as. ukladajac w } -\infty,$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x^2 - 2x} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x} - x) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x} - x) \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 2x} + x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{2}{x}\right)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{|x|\sqrt{1 - \frac{2}{x}} + x} = \left\{ \begin{aligned} & |x| = x \text{ dla } x > 0 \end{aligned} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{1 - \frac{2}{x}} + 1} = \frac{-2}{2} = -1 \end{aligned}$$

