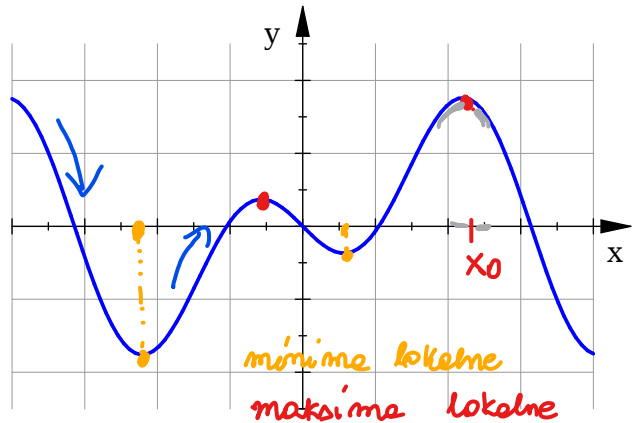
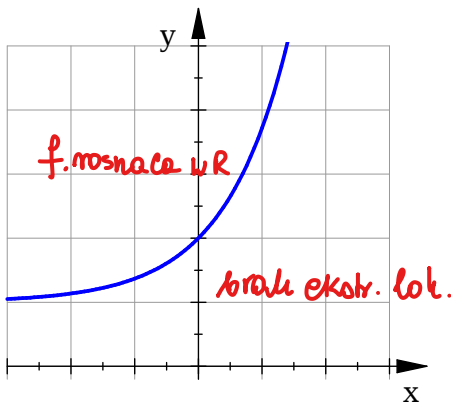


3 Monotoniczność i ekstrema lokalne funkcji (cz.1)

Twierdzenie 1. Załóżmy, że funkcja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna na przedziale I .

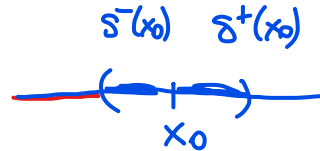
- 1) Jeśli $f'(x) = 0$ dla $x \in I$, to f jest stała na I .
- 2) Jeśli $f'(x) > 0$ dla $x \in I$, to f jest rosnąca na I .
- 3) Jeśli $f'(x) < 0$ dla $x \in I$, to f jest malejąca na I .



I warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego.

Twierdzenie 2a. Załóżmy, że funkcja $f : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna. Jeśli

- a) $f'(x_0) = 0$,
- b) $\bigwedge_{x \in S^-(x_0)} f'(x) > 0$ i $\bigwedge_{x \in S^+(x_0)} f'(x) < 0$



to funkcja f ma w x_0 ~~maksimum~~ **maksimum** lokalne właściwe.

Twierdzenie 2b. Załóżmy, że funkcja $f : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna. Jeśli

- a) $f'(x_0) = 0$,
- b) $\bigwedge_{x \in S^-(x_0)} f'(x) < 0$ i $\bigwedge_{x \in S^+(x_0)} f'(x) > 0$

to funkcja f ma w x_0 ~~minimum~~ **minimum** lokalne właściwe.

$d = ?$ $f'(x) = ?$

- $f'(x) = 0$ punkt stacjonarny
- $f'(x) > 0$
- $f'(x) < 0$

Odp.

Zadanie domowe:
 $f(x) = \frac{2x}{x^2+2}$

Zadanie 1. Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

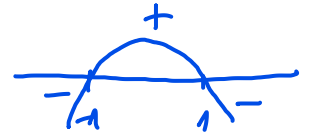
$$D = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1} \right)' = \frac{(x)' \cdot (x^2+1) - x \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1 - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \text{ dla } x \in D$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 1-x^2 = 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x) = 0 \Leftrightarrow (x=1 \vee x=-1) \quad \begin{matrix} 1 \in D \\ -1 \in D \end{matrix}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} > 0 \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$$

$\Delta (x^2+1)^2 > 0$
 $x \in D$



$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} < 0 \Leftrightarrow 1-x^2 < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

x	$S^-(-1)$ $(-\infty, -1)$	-1	$S^+(-1)$ $(-1, 1)$	1	$S^+(1)$ $(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\min. \text{lok.}$ $-\frac{1}{2}$ I u. u.	$\nearrow$	$\max. \text{lok.}$ $\frac{1}{2}$ I u. u.	$\searrow$

$$f(-1) = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$f(1) = \frac{1}{2}$$

Zadanie 2. Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$.

$$D = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 0 = 4x^2(x-3) \text{ dla } x \in D$$

$$f(0) = 2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2(x-3) = 0 \Leftrightarrow (x=0 \vee x=3) \quad \text{dwa punkty stacjonarne (krytyczne)}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 4x^2(x-3) > 0 \Leftrightarrow x \in (3, +\infty)$$



$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 4x^2(x-3) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (0, 3)$$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	2	$\searrow$	$\min. \text{lok.}$ -25 I u. u.	$\nearrow$

$$f(0) = 2$$

$$f(3) = 3^4 - 4 \cdot 3^3 + 2 = \dots$$

Zadanie 3. Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji $f(x) = x^2 \cdot e^{3x}$. $f(x) = x^2 \cdot e^{2x}$

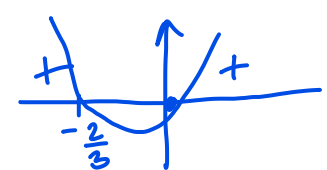
$D = \mathbb{R}$

$$f'(x) = (x^2)' \cdot e^{3x} + x^2 \cdot (e^{3x})' = 2x \cdot e^{3x} + x^2 \cdot e^{3x} \cdot (3x)' = 2x e^{3x} + 3x^2 e^{3x} = x e^{3x} (2 + 3x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot e^{3x} \cdot (2 + 3x) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \wedge e^{3x} > 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Leftrightarrow (x = 0 \vee x = -\frac{2}{3})$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \cdot e^{3x} (2 + 3x) > 0 \Leftrightarrow x(2 + 3x) > 0$$

$x \in (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (0, +\infty)$



$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \cdot e^{3x} (2 + 3x) < 0 \Leftrightarrow x \cdot (2 + 3x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\frac{2}{3}, 0)$$

x	$(-\infty, -\frac{2}{3})$	$-\frac{2}{3}$	$(-\frac{2}{3}, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{4}{9}e^{-2}$	$\searrow$	$\nwarrow$	$\nearrow$

max. lokmin. lok

$f(0) = 0$

$$f(-\frac{2}{3}) = \frac{4}{9}e^{3 \cdot (-\frac{2}{3})} = \frac{4}{9}e^{-2}$$

Zadanie 4. Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$.

$f(x) = \frac{2}{x} + \ln x$

$f(x) = \frac{2}{x} - \ln(2x)$

$D = (0, +\infty)$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-1+x}{x^2} \text{ dla } x \in D$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-1+x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = +1 \in D$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-1+x}{x^2} > 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 > 0 \\ x > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow -1+x > 0 \Leftrightarrow x < 1 \wedge x \in D \Leftrightarrow x \in (0, 1)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (1, +\infty)$$

x	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	X	+	0	-
$f(x)$	X	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

max. lok

$f(1) = \frac{1}{1} + \ln 1 = 1$