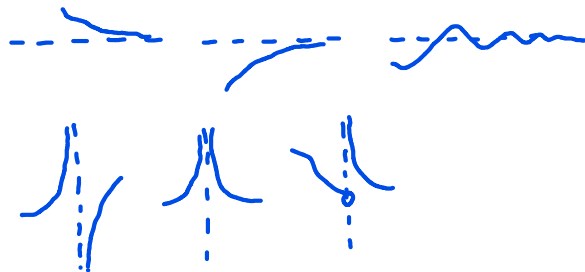


5 Szkicowanie wykresów funkcji (cz.1)

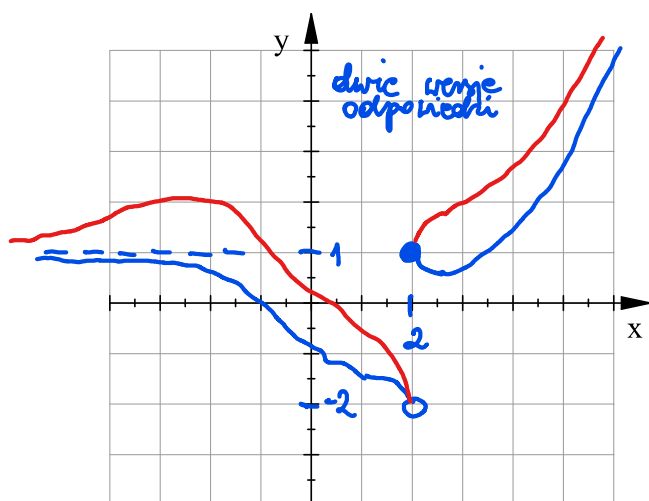
- ♦ granica funkcji $\longrightarrow$ asymptoty
- ♦ pochodna funkcji $\longrightarrow$ monotoniczność funkcji, elstrema lokalne
- ♦ druga pochodna funkcji $\longrightarrow$ wypukłość funkcji, punkty przegięcia



Zadanie 1. Naskicuj wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniającej podane warunki.

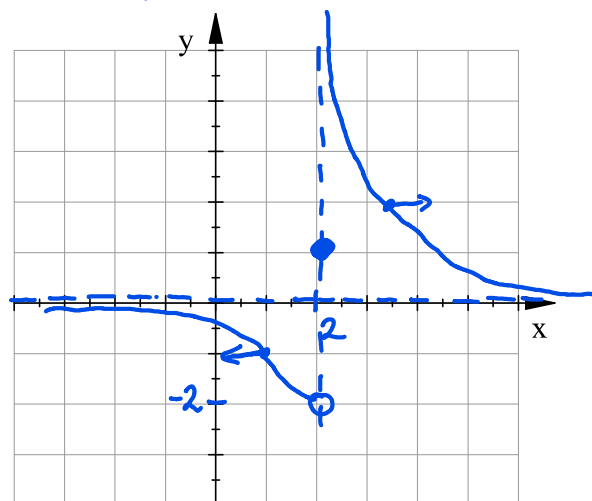
a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty && \text{brak os. poziomej} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= 1 && \text{y=1 os. pozioma w } -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= -2 && \text{brak os. pionowej} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= f(2) = 1 && \end{aligned}$$



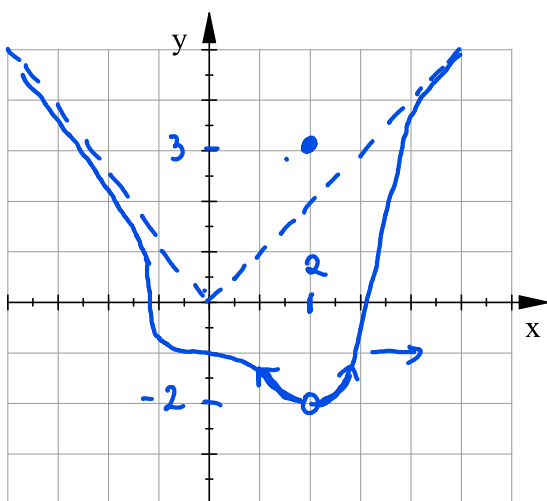
b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 0 && \text{y=0 asymptota pozioma} \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= -2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= +\infty && \text{x=2 asymptota pionowa prawostronna} \end{aligned}$$



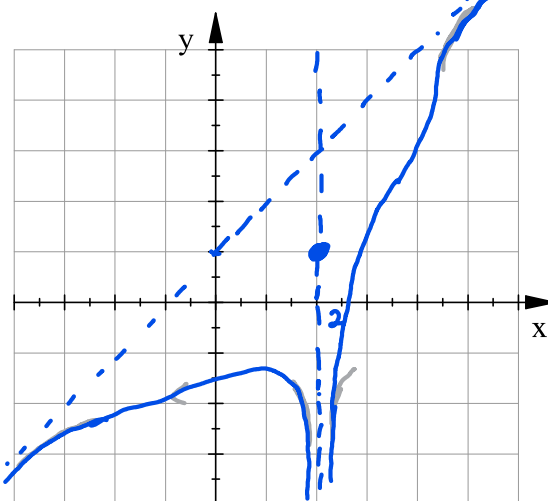
c)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x+1)) &= 0 && \text{y=x+1 os. ukośna w } +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-x)) &= 0 && \text{y=-x os. ukośna w } -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= -2 && \text{prosta x=2 nie jest asymptotą pionową} \\ f(2) &= 3 && \end{aligned}$$



d)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x-1)) &= 0 && \text{y=x-1 os. ukośna w } +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x-1)) &= 0 && \text{os. ukośna w } +\infty \text{ i } -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= -\infty && \text{x=2 os. pionowa obojstronna} \\ f(2) &= 1 && \end{aligned}$$

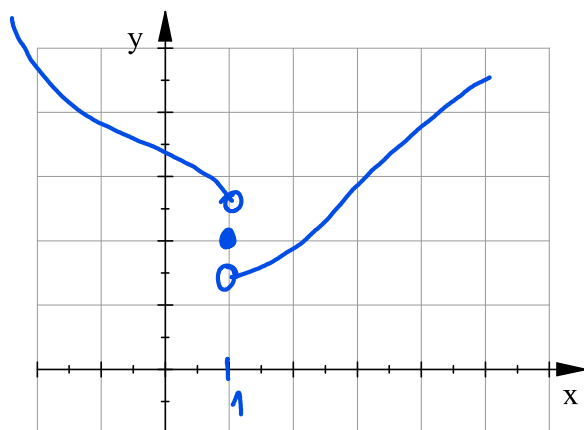


Zadanie 2. Narysuj wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniających podane warunki.

a)

$$f'(x) > 0 \text{ dla } x \in (1, +\infty)$$

$$f'(x) < 0 \text{ dla } x \in (-\infty, 1)$$

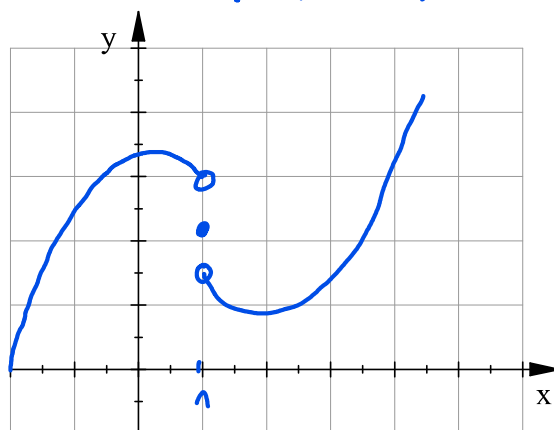


b)

$$f''(x) > 0 \text{ dla } x \in (1, +\infty)$$

$$f''(x) < 0 \text{ dla } x \in (-\infty, 1)$$

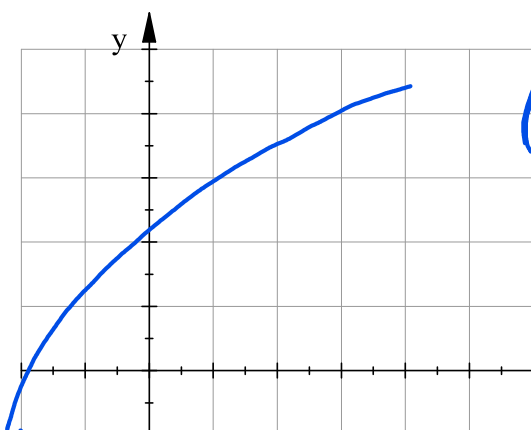
funkcja
wypukła
wklęsła



c)

$$f'(x) > 0 \text{ dla } x \in (1, +\infty)$$

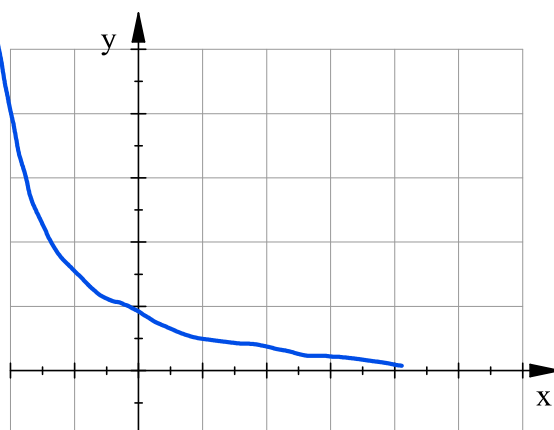
$$f''(x) < 0 \text{ dla } x \in (1, +\infty)$$



d)

$$f'(x) < 0 \text{ dla } x \in (-\infty, 3)$$

$$f''(x) > 0 \text{ dla } x \in (-\infty, 3)$$



e)

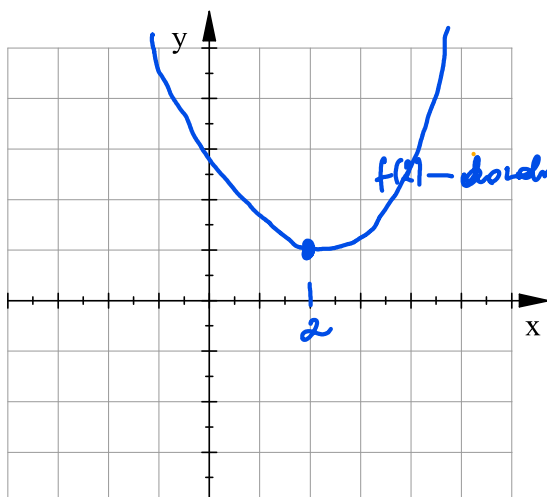
$$f''(x) > 0 \text{ dla } x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) < 0 \text{ dla } x \in (-\infty, 2)$$

$$f'(2) = 0$$

$$f'(x) > 0 \text{ dla } x \in (2, +\infty)$$

I w.H.
 $x_0 = 2$ min. lok



f)

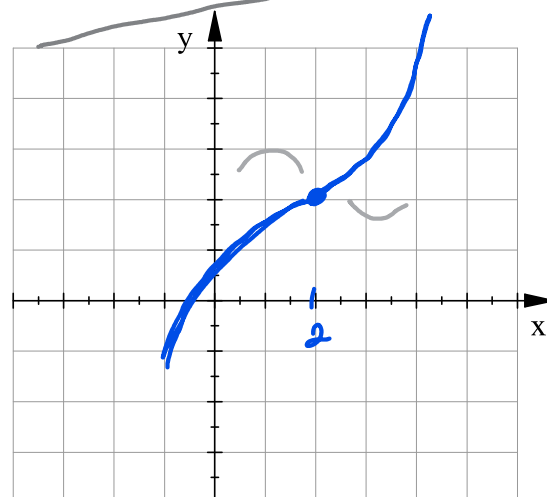
$$f'(x) > 0 \text{ dla } x \in \mathbb{R}$$

$$f''(x) < 0 \text{ dla } x \in (-\infty, 2)$$

$$f''(2) = 0$$

$$f''(x) > 0 \text{ dla } x \in (2, +\infty)$$

$x_0 = 2$ punkt przegięcia

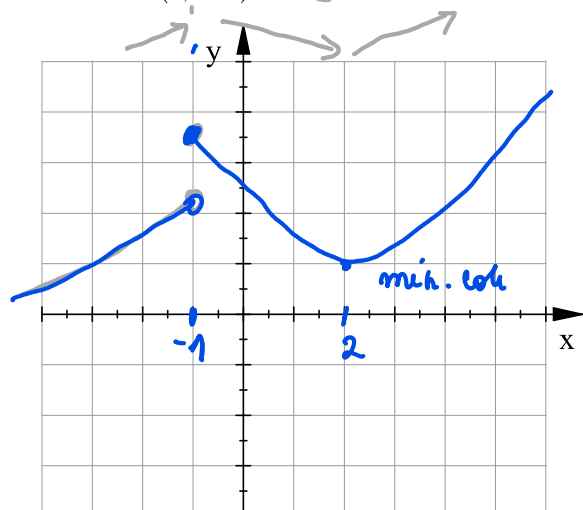


Zadanie 3. Narysuj wykres funkcji $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniającej podane warunki.

a)

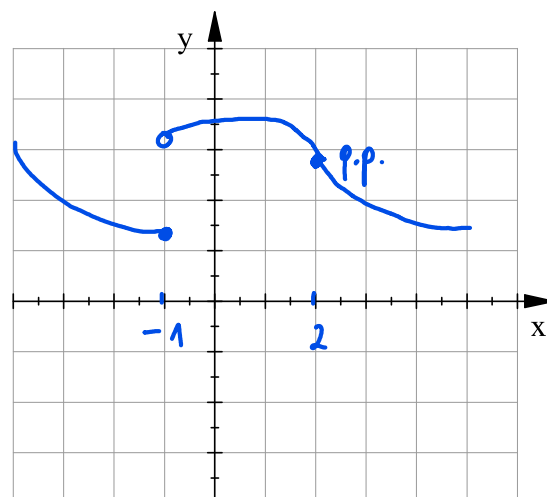
$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \quad \text{dla } x \in (-\infty, -1) \\ f'(x) &< 0 \quad \text{dla } x \in (-1, 2) \\ f'(2) &= 0 \\ f'(x) &> 0 \quad \text{dla } x \in (2, +\infty) \end{aligned}$$

I 4.5
x₀=2 min. lok.



b)

$$\begin{aligned} f''(x) &> 0 \quad \text{dla } x \in (-\infty, -1) \\ f''(x) &< 0 \quad \text{dla } x \in (-1, 2) \\ f''(2) &= 0 \\ f''(x) &> 0 \quad \text{dla } x \in (2, +\infty) \end{aligned}$$



c)

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \quad \text{dla } x \in (-\infty, -1) \\ f'(x) &< 0 \quad \text{dla } x \in (-1, 2) \\ f'(2) &= 0 \\ f'(x) &> 0 \quad \text{dla } x \in (2, +\infty) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x + 4) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0$$

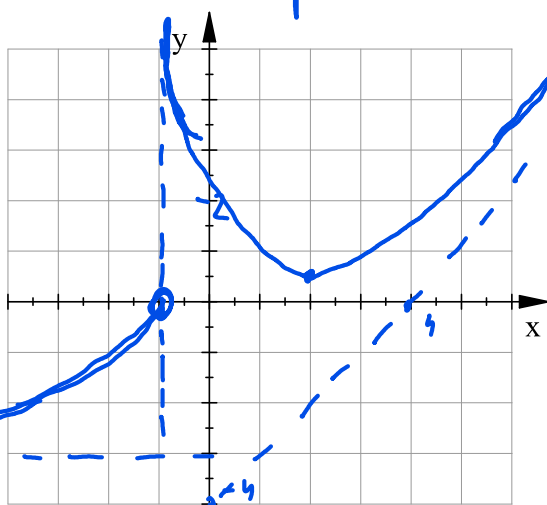
$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

j.w.

$$y = 3 \text{ as. poziom } u \rightarrow -\infty$$

$$y = x - 4 \text{ as. ukośne } u \rightarrow +\infty$$

x = -1 as. pionowa
przerwana



d)

$$\begin{aligned} f''(x) &> 0 \quad \text{dla } x \in (-\infty, -1) \\ f''(x) &< 0 \quad \text{dla } x \in (-1, 2) \\ f''(2) &= 0 \\ f''(x) &> 0 \quad \text{dla } x \in (2, +\infty) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2$$

j.w.

$$y = 0 \text{ as. pozioma } u \rightarrow +\infty$$

