

1 Asymptoty (cz.1)

Definicja. Niech $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $X = (-\infty, x_0) \cup (x_0, +\infty)$ oraz $x_0 \in \mathbb{R}$.

- 1) Prostą o równaniu $x = x_0$
nazywamy **asymptotą pionową**
wykresu funkcji f , gdy

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ i } \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty.$$

- 2) Prostą o równaniu $y = b$
nazywamy **asymptotą poziomą**
wykresu funkcji f w $\pm\infty$, gdy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \quad \text{ i } \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b.$$

- 3) Prostą o równaniu $y = ax + b$
nazywamy **asymptotą ukośną**
wykresu funkcji f w $\pm\infty$, gdy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax - b) = 0 \quad \text{ i } \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - b) = 0.$$

Twierdzenie. Niech $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Prosta o równaniu $y = ax + b$

jest asymptotą ukośną wykresu funkcji w $+\infty$ $\iff a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ i $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$

Analogiczne twierdzenie zachodzi dla asymptoty ukośnej w $-\infty$.

Zadanie. Wyznaczyć asymptoty wykresu funkcji f . Jak mógłby wyglądać wykres funkcji f ?

1) $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$

2) $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x}$

3) $f(x) = \frac{1}{\arcsin x}$

4)

0

Asymptoty pionowe

Asymptoty poziome

Asymptoty ukośne

7 Asymptoty (cz.2)

Zadanie 1. Wyznaczyć asymptoty wykresu funkcji $f(x) = \ln \frac{x}{x-2}$

$$D: x \neq 2 \wedge \frac{x}{x-2} > 0$$

$$\frac{x}{x-2} > 0 \Rightarrow x(x-2) > 0$$

$$D = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$$

As. pionowe

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \left[\ln \frac{0^-}{-2} \right] = \left[\ln 0^+ \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \left[\ln \frac{2}{0^+} \right] = \left[\ln(+\infty) \right] = +\infty$$

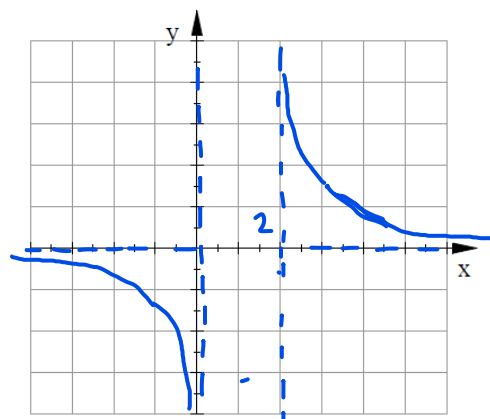
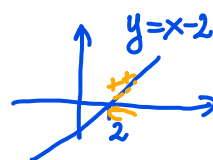
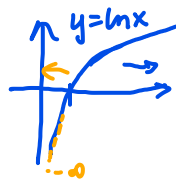
$x=0$ - as. pionowe lewostronna, $x=2$ - as. pionowe prawostronna

As. poziome

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \left\{ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot 1}{x(1-\frac{2}{x})} = \frac{1}{1} = 1 \right\} = \left[\ln 1 \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \left\{ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x-2} = 1 \quad \frac{-\infty}{-\infty} = \frac{2}{-\infty} = 0 \right\} = \left[\ln 1 \right] = 0$$

$y=0$ - as. pozioma w $+\infty$ i $-\infty$



Zadanie 2. Wyznaczyć asymptoty wykresu funkcji $f(x) = x + e^{\frac{1}{x-2}}$

$$D = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$$

As. pionowe

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \left[2 + e^{\frac{1}{0^-}} \right] = \left[2 + e^{-\infty} \right] = 2 + 0 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \left[2 + e^{\frac{1}{0^+}} \right] = \left[2 + e^{+\infty} \right] = \left[2 + \infty \right] = +\infty$$

$x=2$ - as. pionowe prawostronna

As. poziome

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \left[\infty + e^{\frac{1}{\infty-2}} \right] = \left[\infty + e^0 \right] = \left[\infty + 1 \right] = +\infty$$

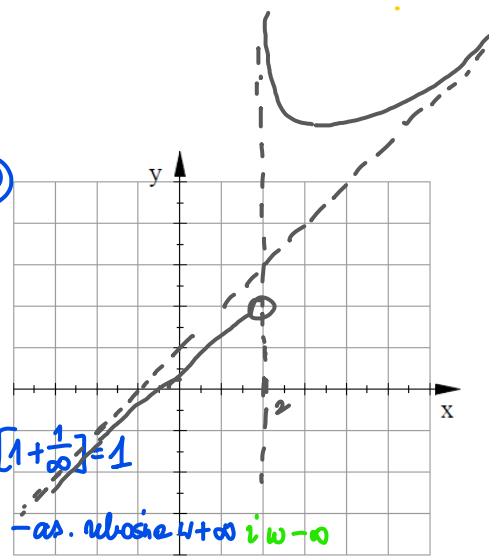
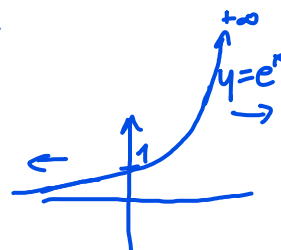
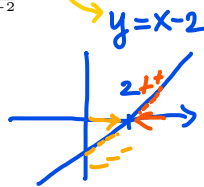
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \left[-\infty + e^{\frac{1}{-\infty-2}} \right] = -\infty$$

brak as. poziomych

As. ukośne $(w+\infty)$

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + e^{\frac{1}{x-2}}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{x} \right) = \left[1 + \frac{1}{\infty} \right] = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + e^{\frac{1}{x-2}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x-2}} = \left[e^0 \right] = 1$$



Zadanie 3. Wyznaczyć asymptoty wykresu funkcji $f(x) = \frac{x+4}{1-\ln x}$

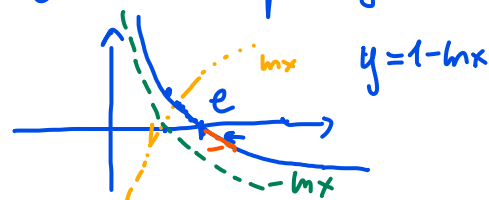
$\mathcal{D}: x > 0 \wedge 1 - \ln x \neq 0$
 $x \neq e$
 $\mathcal{D} = (0, e) \cup (e, +\infty)$

$1 - \ln x = 0$
 $\ln x = 1$
 $x = e$

• As. pionowe

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+4}{1-\ln x} = \left[\frac{4}{1-\ln 0^+} \right] = \left[\frac{4}{1-(-\infty)} \right] = \left[\frac{4}{-\infty} \right] = 0 \rightarrow$ brak as. pionowej

$\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = \left[\frac{e+4}{0^-} \right] = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = \left[\frac{e+4}{0^+} \right] = +\infty$
 $x = e$ as. pionowa obustronna

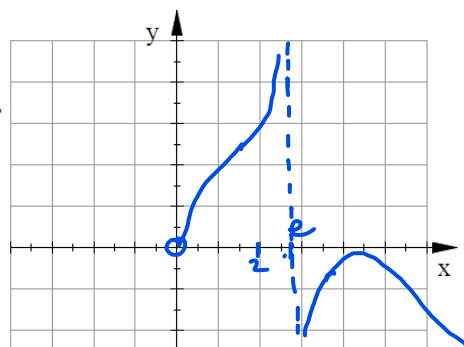


• As. poziome

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \left[\frac{\infty}{1-\ln \infty} \right] = \left[\frac{\infty}{-\infty} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+4)'}{(1-\ln x)'} =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$ - brak as. poziomej

• As. ukośne $(\infty, +\infty)$

$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x+4}{1-\ln x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+4}{1-\ln x} \cdot \frac{1}{x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+4}{x} \right) \cdot \frac{1}{1-\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{x} \right) \cdot \frac{1}{1-\ln x} = 1 \cdot \frac{1}{1-\infty} = 0$



$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 0 = -\infty$
 brak as. ukośnej

Zadanie 4. Wyznaczyć asymptoty wykresu funkcji $f(x) = \frac{x-2}{e^{x-1}-1}$

$\mathcal{D}: e^{x-1} - 1 \neq 0$

$e^{x-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x-1} = e^0$
 $x-1=0$
 $x=1$

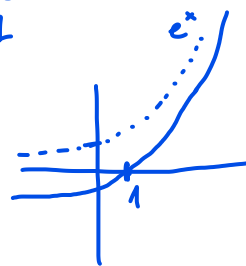
$\mathcal{D} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \left[\frac{1-2}{e^0-1} \right] = \left[\frac{-1}{0^-} \right] = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \left[\frac{-1}{0^+} \right] = -\infty$

$x=1$ - as. pionowa obustronna

$y = e^{x-1} - 1$
 $e^x \rightarrow [1, +\infty)$



$\otimes \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{x-1} = [-\infty \cdot e^{-\infty}] = [\infty \cdot 0] =$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{1-x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{1-x} \cdot (-1)} = \left[\frac{1}{-\infty} \right] = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{e^{x-1}-1} = \left[\frac{\infty}{e^\infty-1} \right] = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{H}{=}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = \left[\frac{1}{e^\infty} \right] = 0 \rightarrow y=0$ as. pozioma $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \left[\frac{-\infty}{e^{-\infty}-1} \right] = \left[\frac{-\infty}{-1} \right] = +\infty \rightarrow$ brak as. poziomej $-\infty$

$\otimes \otimes a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x} \cdot \frac{1}{e^{x-1}-1} = \left[1 \cdot \frac{1}{-\infty} \right] = -1$
 $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-2}{e^{x-1}-1} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2+x(e^{x-1}-1)}{e^{x-1}-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2+x e^{x-1}-x}{e^{x-1}-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2+x e^{x-1}}{e^{x-1}-1} =$
 $\left[\frac{-2+0}{-1} \right] = 2$
 $y = -x+2$ as. ukośna $-\infty$