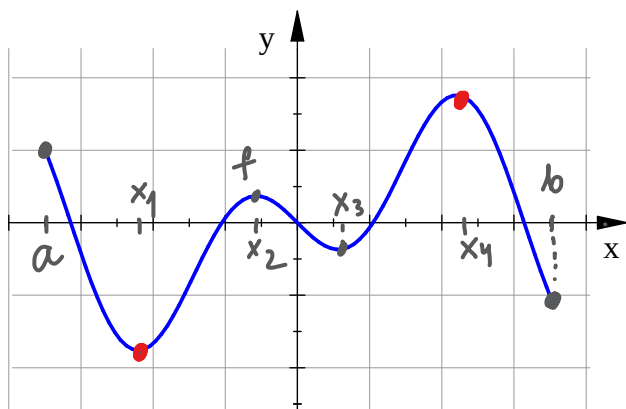


absolutne

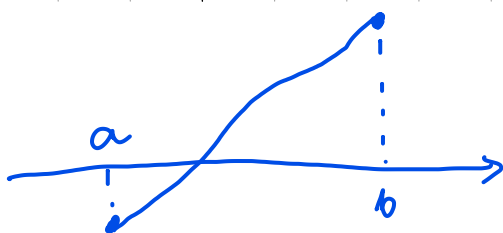
8 Ekstrema lokalne i globalne funkcji (cz.2)



x_1, x_3 - minimumy lokalne
 x_2, x_4 - maximumy lokalne

$$\max_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_4)$$

$$\min_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_1)$$



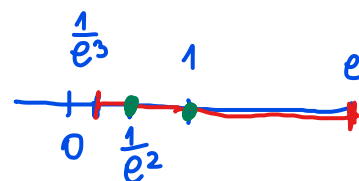
$$\max_{x \in [a, b]} f(x) = f(b)$$

$$\min_{x \in [a, b]} f(x) = f(a)$$

Zadanie 1. Wyznaczyć ekstrema globalne (największą i najmniejszą wartość) funkcji $f(x) = \ln^3 x + 3 \ln^2 x + 1$ na $[e^{-3}, e]$.

$$f'(x) = 3 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} = 3 \ln x \cdot \frac{1}{x} (\ln x + 2) \quad \text{dla } x > 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot (\ln x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \ln x + 2 = 0 \\ \ln x = -2 \\ x = e^{-2} \end{cases}$$



x	e^{-3}	e^{-2}	1	e
$f(x)$	1	5	1	5

$$f(1) = \ln^3 1 + 3 \ln^2 1 + 1 = 1$$

$$f(e) = \ln^3 e + 3 \ln^2 e + 1 = 1 + 3 + 1 = 5$$

$$\ln e = 1$$

$$f(e^{-2}) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 1 = -8 + 12 + 1 = 5$$

$$\ln e^{-2} = -2$$

$$f(e^{-3}) = (-3)^3 + 3(-3)^2 + 1 = -27 + 27 + 1 = 1$$

$$\ln e^{-3} = -3$$

$$\max_{x \in [e^{-3}, e]} f(x) = 5 = f(e) = f(e^{-2})$$

$$\min_{x \in [e^{-3}, e]} f(x) = 1 = f(e^{-3}) = f(1)$$

Zadanie 2. Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji $f(x) = x - 4 \arctg x$

$$(4 \arctg x)' = 4 (\arctg x)'$$

$$D = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 1 - 4 \cdot \frac{1}{x^2+1} = \frac{x^2+1-4}{x^2+1} = \frac{x^2-3}{x^2+1} \text{ dla } x \in D$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x^2-3=0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0 \Leftrightarrow (x=\sqrt{3} \vee x=-\sqrt{3})$$

$$\oplus \quad f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3}{x^2+1} > 0 \Leftrightarrow (x^2-3)(x^2+1) > 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \wedge \\ x \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2+1 > 0 \\ x^2-3 > 0 \end{array} \right. \quad \downarrow$$

$x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

$$\ominus \quad f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$$

x	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$-\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3}$	$\searrow$	$\sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}$	$\nearrow$

max. lok. min. lok.

$$\begin{aligned} f(\sqrt{3}) &= \sqrt{3} - 4 \arctg \sqrt{3} \\ f(-\sqrt{3}) &= -\sqrt{3} - 4 \arctg(-\sqrt{3}) = \\ &= -\sqrt{3} + 4 \arctg \sqrt{3} = \\ &= -\sqrt{3} + 4 \cdot \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Zadanie 3. Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2} \quad \text{zadanie domowe}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{e^x \cdot x(x-2)}{x^4} = \frac{e^x(x-2)}{x^3} \text{ dla } x \neq 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x(x-2)}{x^3} = 0 \Leftrightarrow (e^x = 0 \vee x-2=0) \Leftrightarrow x=2$$

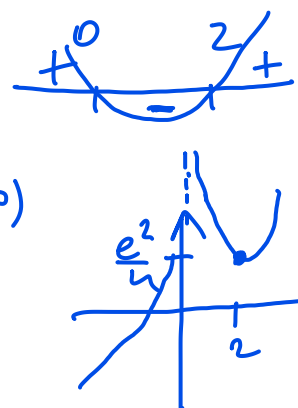
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x \cdot x \cdot (x-2)}{x^4} > 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \wedge \\ x \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} e^x > 0 \\ x^4 > 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x \cdot (x-2) > 0 \\ x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \end{array} \right.$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \text{analogicznie} \quad \left\{ \begin{array}{l} x \cdot (x-2) < 0 \\ x \in (0, 2) \end{array} \right.$$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	X	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	X	$\searrow$	$\frac{e^2}{4}$	$\nearrow$

min. lok.

$$f(2) = \frac{e^2}{4}$$



$$\left(\frac{1}{2-x}\right)' = -1 \cdot \frac{-1}{(2-x)^2}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Zadanie 4. Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji $f(x) = (1+x)e^{\frac{1}{2-x}}$.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$f'(x) = (1+x) \cdot e^{\frac{1}{2-x}} + (1+x) \cdot \left(e^{\frac{1}{2-x}}\right)' = e^{\frac{1}{2-x}} + (1+x) \cdot \left(\frac{1}{2-x}\right)' \cdot e^{\frac{1}{2-x}} = e^{\frac{1}{2-x}} + (1+x) \cdot \frac{1}{(2-x)^2} \cdot e^{\frac{1}{2-x}} \quad \text{dla } x \neq 2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2-x}} \left(1 + \frac{1+x}{(2-x)^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{(2-x)^2 + 1+x}{(2-x)^2} = 0 \Leftrightarrow 4 - 4x + x^2 + 1 + x = 0$$

$$x^2 - 3x + 5 = 0 \quad \Delta = 9 - 20 < 0 \quad x \in \emptyset$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2-x}} \frac{x^2 - 3x + 5}{(2-x)^2} > 0 \quad \text{dla } x \in D$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

x	$(-\infty, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	X	+
$f(x)$		X	

Uwaga! funkcje rośnie na przedziale $(-\infty, 2)$ i $(2, +\infty)$ ale niekomiecznie w D.

Zadanie 5. Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji $f(x) = \ln^2 x - 6 \ln x$.

$$D = (0, +\infty)$$

$$f'(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} - 6 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x} (\ln x - 3) \quad \text{dla } x \in D$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x} (\ln x - 3) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 3 \quad x = e^3 \in D$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x} (\ln x - 3) > 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \wedge \\ x \in D \end{array} \right. \quad \frac{2}{x} > 0 \quad \ln x - 3 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 3$$

$$a = e > 1 \quad \ln x > \ln e^3 \quad x > e^3$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \text{analogicznie} \quad x < e^3 \wedge x \in D$$

x	0	$(0, e^3)$	e^3	$(e^3, +\infty)$
$f'(x)$	X	-	0	+
$f(x)$	X		-9	

min. lok.

$$f(e^3) = (\ln e^3)^2 - 6 \ln e^3 = 3^2 - 6 \cdot 3 = 9 - 18 = -9$$