

Krok po kroku...

Krok 1 (Dzielnia funkcji) $D_f = \dots$

Krok 2 (Miejsca zerowe funkcji) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \dots$

Krok 3 (Granice funkcji na końcach dziedziny) $\lim_{x \rightarrow \dots} f(x) = \dots$

Krok 4 (Asymptoty wykresu funkcji) $x = \dots$; $y = \dots$

Krok 5 (Pochodna funkcji) $f'(x) = \dots$

Krok 6 (Dzielnia pochodnej funkcji) $D_{f'} = \dots$

Krok 7 (Miejsca zerowe pochodnej funkcji) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \dots$

Krok 8 (Znak pochodnej funkcji) $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \dots$; $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \dots$

Krok 9 (Monotoniczność i ekstrema) f rośnie na ...; f maleje na ... w punkcie ... f ma maksimum/minimum równe ...

Krok 10 (Druga pochodna funkcji) $f''(x) = \dots$

Krok 11 (Dzielnia drugiej pochodnej funkcji) $D_{f''} = \dots$

Krok 12 (Miejsca zerowe drugiej pochodnej funkcji) $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \dots$

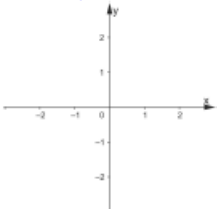
Krok 13 (Znak drugiej pochodnej funkcji) $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \dots$; $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \dots$

Krok 14 (Wypukłość, wklęsłość i punkty przegięcia) f wypukła na ...; f wklęsła na ... (.....) jest punktem przegięcia wykresu funkcji f

Krok 15 (Tabela)

$f'(x)$	-	-	+	+
$f''(x)$	-	+	-	+
	f maleje i jest wklęsła ↘	f maleje i jest wypukła ↖	f rośnie i jest wklęsła ↗	f rośnie i jest wypukła ↘

Krok 16 (Wykres funkcji)



Przykład

Przykład 1 Zbadamy przebieg zmienności funkcji $f(x) = x^3 \cdot \ln(-x)$.

1. $D: -x > 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow D = (-\infty, 0)$

2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 \ln(-x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \vee \ln(-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin D \vee -x = e^0 \Leftrightarrow x = -1 \in D$

3. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 \ln(-x) = \left\{ \begin{matrix} 0^+ \cdot 2 \\ 0^+ \cdot 0 \end{matrix} \right\} = 0 \cdot \ln(0^+) = 0 \cdot (-\infty) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 \ln(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 \ln(-x) = \left\{ \begin{matrix} \frac{-\infty}{0^+} \\ \frac{0}{0^+} \end{matrix} \right\} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 \ln(-x) + x^2 \cdot (-1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \ln(-x) + x = -\infty \cdot (-\infty) = -\infty$

4. $f'(x) = (x^3 \ln(-x))' = (x^3)' \cdot \ln(-x) + x^3 \cdot (\ln(-x))' = 3x^2 \ln(-x) + x^3 \cdot \frac{1}{-x} = 3x^2 \ln(-x) - x^2 = x^2(3 \ln(-x) - 1)$

5. $D_{f'}: -x > 0 \wedge -x > 0 \Rightarrow D_{f'} = D_f = D$

6. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(3 \ln(-x) - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin D \vee 3 \ln(-x) - 1 = 0 \Leftrightarrow 3 \ln(-x) = 1 \Leftrightarrow \ln(-x) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow -x = e^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x = -e^{\frac{1}{3}} \in D$

7. $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2(3 \ln(-x) - 1) > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge 3 \ln(-x) - 1 > 0 \vee x < 0 \wedge 3 \ln(-x) - 1 < 0$

8. $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -e^{\frac{1}{3}})$

9. $f''(x) = (x^2(3 \ln(-x) - 1))' = 2x(3 \ln(-x) - 1) + x^2 \cdot \frac{3}{-x} = 6x \ln(-x) - 2x - 3x = 6x \ln(-x) - 5x = x(6 \ln(-x) - 5)$

10. $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x(6 \ln(-x) - 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin D \vee 6 \ln(-x) - 5 = 0 \Leftrightarrow 6 \ln(-x) = 5 \Leftrightarrow \ln(-x) = \frac{5}{6} \Leftrightarrow -x = e^{\frac{5}{6}} \Leftrightarrow x = -e^{\frac{5}{6}} \in D$

11. $D_{f''}: -x > 0 \wedge -x > 0 \Rightarrow D_{f''} = D$

12. $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6 \ln(-x) - 5 = 0 \Leftrightarrow 6 \ln(-x) = 5 \Leftrightarrow \ln(-x) = \frac{5}{6} \Leftrightarrow -x = e^{\frac{5}{6}} \Leftrightarrow x = -e^{\frac{5}{6}} \in D$

13. $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6 \ln(-x) - 5 > 0 \Leftrightarrow 6 \ln(-x) > 5 \Leftrightarrow \ln(-x) > \frac{5}{6} \Leftrightarrow -x > e^{\frac{5}{6}} \Leftrightarrow x < -e^{\frac{5}{6}}$

14. $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -e^{\frac{5}{6}})$

15. $f(x) = x^3 \ln(-x)$

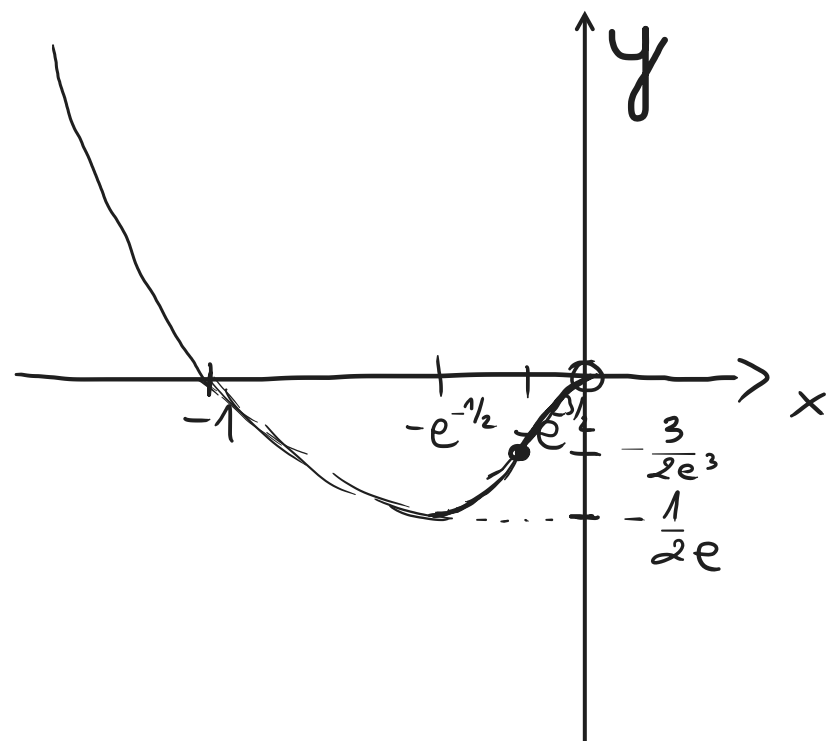
x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, -e^{\frac{1}{3}})$	$-e^{\frac{1}{3}}$	$(-e^{\frac{1}{3}}, -e^{\frac{5}{6}})$	$-e^{\frac{5}{6}}$	$(-e^{\frac{5}{6}}, 0)$	
$f(x)$	-	-	-	0	+	+	+	X
$f'(x)$	+	+	+	+	+	0	-	X
$f''(x)$	+	0	-	$-\frac{1}{2e}$	+	$-\frac{3}{2e^2}$	0	X

$-1, -e^{\frac{1}{3}}, -e^{\frac{5}{6}}$

$-e^0 < -e^{\frac{1}{3}} < -e^{\frac{5}{6}}$

$f(-e^{\frac{1}{3}}) = (-e^{\frac{1}{3}})^3 \cdot \ln(e^{-\frac{1}{3}}) = e^{-1} \cdot (-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{3e}$

$f(-e^{\frac{5}{6}}) = (-e^{\frac{5}{6}})^3 \cdot \ln(e^{-\frac{5}{6}}) = e^{-\frac{5}{2}} \cdot (-\frac{5}{6}) = -\frac{5}{6e^{\frac{5}{2}}}$



Funkcja f jest malejąca na przedziale $(-\infty, -e^{\frac{1}{3}})$ i rośnie na przedziale $(-e^{\frac{1}{3}}, 0)$.
W $-e^{\frac{1}{3}}$ posiada minimum lok. w. równe $-\frac{1}{3e}$.
Na przedziale $(-\infty, -e^{\frac{5}{6}})$ funkcja f jest wypukła, zaś na przedziale $(-e^{\frac{5}{6}}, 0)$ jest wklęsła.
Punktem przegięcia jest $(-e^{\frac{5}{6}}, -\frac{5}{6e^{\frac{5}{2}}})$.