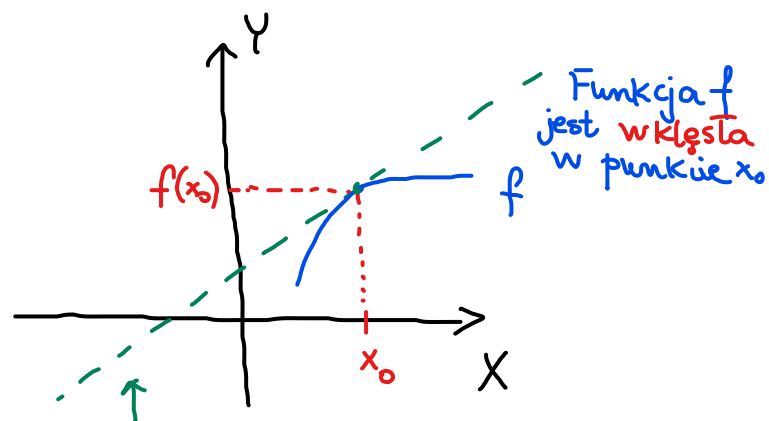
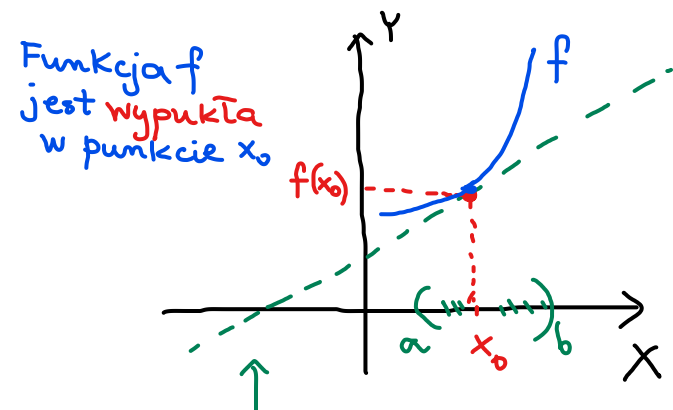


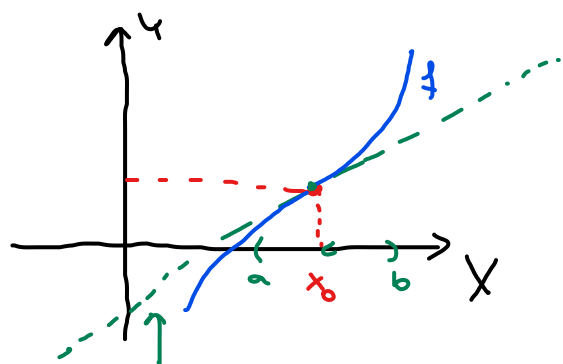


STYCZNA DO WYKRESU FUNKCJI W PUNKCIE $(x_0, f(x_0))$

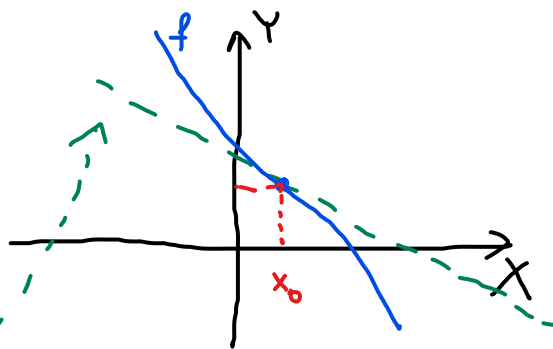
Tw. Niech $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją 2-krotnie różniczkowaną.

(a) Jeżeli $\bigwedge_{x \in (a, b)} f''(x) > 0$, to funkcja f jest wypukła na przedziale (a, b) .

(b) Jeżeli $\bigwedge_{x \in (a, b)} f''(x) < 0$, to funkcja f jest wklęsła na przedziale (a, b) .



STYCZNA DO WYKRESU FUNKCJI f W PUNKCIE $(x_0, f(x_0))$



x_0 - punkt **przebiecia** wykresu funkcji f

ZADANIE. WYZNACZYĆ PRZĘDZIAŁY WYPUKŁOŚCI, PRZĘDZIAŁY WKŁĘŚĆOŚCI I PUNKTY PRZĘGIECIA WYKRESU FUNKCJI f , gdy

(1) $f(x) = x^2 \cdot e^x$ $D = \mathbb{R}$

$$f'(x) = (x^2)' \cdot e^x + x^2 \cdot (e^x)' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (2x + x^2) \cdot e^x$$

$$f''(x) = (f'(x))' = [(2x + x^2) \cdot e^x]' = (2x + x^2)' \cdot e^x + (2x + x^2) \cdot (e^x)' = \begin{cases} (e^x)' = e^x \\ (x^a)' = a \cdot x^{a-1} \end{cases}$$

$$= (2 + 2x) \cdot e^x + (2x + x^2) \cdot e^x = (2 + 2x + 2x + x^2) \cdot e^x = (2 + 4x + x^2) \cdot e^x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (2 + 4x + x^2) \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow 2 + 4x + x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 + \sqrt{2} \vee x = -2 - \sqrt{2}$$

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} e^x > 0$$

$$\Delta = 16 - 42 = 8$$

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{8}}{2} =$$

$$= \frac{-4 + 2\sqrt{2}}{2} =$$

$$= -2 + \sqrt{2}$$

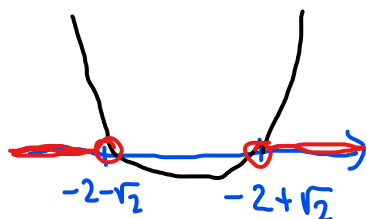
$$x_2 = \frac{-4 - 2\sqrt{2}}{2} = -2 - \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} y = e^x \\ \bigwedge_{x \in \mathbb{R}} e^x > 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 4} = 2\sqrt{2}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow (2 + 4x + x^2) \cdot e^x > 0 \Leftrightarrow 2 + 4x + x^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -2 - \sqrt{2}) \cup (-2 + \sqrt{2}, +\infty)$$



$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2})$$

x	$-\infty$	$(-\infty, -2 - \sqrt{2})$	$-2 - \sqrt{2}$	$\dots$	$-2 + \sqrt{2}$	$\dots$	$+\infty$
$f''(x)$	.	+	0	-	0	+	.
$f(x)$	.	f. wypukła	P.P.	f. wklęsła	P.P.	f. wypukła	.

Odp. Funkcja f jest wypukła w przedziałach $(-\infty, -2 - \sqrt{2})$, $(-2 + \sqrt{2}, +\infty)$.

Funkcja f jest wklęsła w przedziale $(-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2})$.

Punkty $x_0 = -2 - \sqrt{2}$, $x_1 = -2 + \sqrt{2}$ są punktami przegięcia wykresu funkcji f .

$$(2) f(x) = \ln^2 x - 3 \ln x = (\ln x)^2 - 3 \ln x$$

$$D_f = (0, +\infty)$$

$$f'(x) = 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} - 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x - 3}{x}$$

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{2 \ln x - 3}{x} \right)' = \frac{(2 \ln x - 3)' \cdot x - (2 \ln x - 3) \cdot x'}{x^2}$$

$$= \frac{(2 \cdot \frac{1}{x}) \cdot x - (2 \ln x - 3) \cdot 1}{x^2} = \frac{2 - 2 \ln x + 3}{x^2} = \frac{5 - 2 \ln x}{x^2}$$

$$\ln^2 x = (\ln x)^2$$

$$\ln x^2 = \ln(x^2)$$

$$g(x) = (\ln x)^2$$

$$z = w^2 \quad z' = 2w$$

$$w = \ln x \quad w' = \frac{1}{x}$$

$$[(\ln x)^2]' = 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5 - 2 \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 5 - 2 \ln x = 0 \Leftrightarrow 5 = 2 \ln x \Leftrightarrow \ln x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{5}{2}}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{5-2\ln x}{x^2} > 0 \Leftrightarrow 5-2\ln x > 0 \Leftrightarrow 5 > 2\ln x \Leftrightarrow \frac{5}{2} > \ln x \Leftrightarrow$$

$$\bigwedge_{x \in (0, +\infty)} x^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^{\frac{5}{2}}) > \ln x \Leftrightarrow e^{\frac{5}{2}} > x$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow e^{\frac{5}{2}} < x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ln x = \log_e x \\ e > 1 \end{array} \right.$$

x	0	$\dots \downarrow (0, e^{\frac{5}{2}})$	$e^{\frac{5}{2}}$	$\dots \downarrow (e^{\frac{5}{2}}, +\infty)$	$+\infty$
$f''(x)$	X	+	0	-	.
$f(x)$	X	f. wypukła	p.p.	f. wklęsła	.

Odp. Funkcja f jest wypukła w przedziale $(0, e^{\frac{5}{2}})$, zaś wklęsła w przedziale $(e^{\frac{5}{2}}, +\infty)$.

Punkt $x = e^{\frac{5}{2}}$ jest punktem przegięcia wykresu funkcji f

$$(3) f(x) = x - 2 \arctg x \quad - \text{ w domu! }$$