

12 Całkowanie funkcji wymiernych (cz.1)

Całki typu $\int \frac{P_m(x)}{W_n(x)} dx$, gdzie P_m i W_n to wielomiany

Stosowane wzory:

$$1. \int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \text{ dla } \alpha \neq -1,$$

$$2. \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$

$$3. \int \frac{1}{x^2+k} dx = \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{k}} + C \text{ dla } k > 0$$

$$\text{lub} \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C$$

Stosowane metody całkowania: całkowanie przez podstawienie

Inne potrzebne umiejętności: dzielenie wielomianów, rozkład wielomianu na czynniki, postać kanoniczna funkcji kwadratowej, rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste.

• **Pytanie 1:** czy $m \geq n$?

Tak $\rightarrow$ dzielimy wielomiany (zadanie 1)

Nie $\rightarrow$ Przechodzimy do Pytania 2

Zadanie 1. Oblicz całki nieoznaczone:

a) $\int \frac{x^2}{x+2} dx$ $\left\{ \begin{matrix} m=2 \\ n=1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow m > n$ $\Rightarrow$ $\int (x-2 + \frac{4}{x+2}) dx$ $\Rightarrow \int x dx - 2 \int dx + 4 \int \frac{1}{x+2} dx = \frac{x^2}{2} - 2x + 4 \ln|x+2| + C$

b) $\int \frac{x+1}{x+2} dx = \left\{ \begin{matrix} m=n \end{matrix} \right\} \Rightarrow \int \frac{(x+2)-1}{x+2} dx = \int (1 - \frac{1}{x+2}) dx = x - \ln|x+2| + C$

c) $\int \frac{x^2}{x^2+2} dx \rightarrow$ samodzielnie $\left\{ \begin{matrix} m=n=2 \end{matrix} \right\}$

$$\begin{array}{r} x-2 \\ x^2 : (x+2) \\ \underline{-x^2-2x} \\ -2x+4 \\ \underline{2x+4} \\ 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{4 - reszta} \\ \text{z dzielenia} \end{array}$$

• **Pytanie 2:** czy możemy bezpośrednio zastosować wzór 1, 2 lub 3? (lub zapisać całkę jako sumę takich całek)

Tak $\rightarrow$ stosujemy wymienione wzory (zadanie 2)

Nie $\rightarrow$ Przechodzimy do Pytania 3

Zadanie 2. Oblicz całki nieoznaczone:

a) $\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx \stackrel{①}{=} \frac{1}{-2} x^{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$

b) $\int \frac{2x}{x^2+3} dx = \left\{ (x^2+3)' = 2x \right\} \stackrel{②}{=} \frac{1}{2} \ln|x^2+3| + C$

b') $\int \frac{4x}{4-x^2} dx = \dots$

$$c) \int \frac{1}{x^2+3} dx = \left\{ \textcircled{1}, k=3 \right\} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

$$d) \int \frac{x+2}{x^2+3} dx = \overset{\text{Zad 2b}}{\int \frac{x}{x^2+3} dx} + 2 \overset{\text{Zad 2c}}{\int \frac{1}{x^2+3} dx} = \frac{1}{2} \ln|x^2+3| + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

• **Pytanie 3:** czy możemy zastosować podstawienie, po którym da się zastosować wzór 1, 2 lub 3?

Tak $\rightarrow$ stosujemy podstawienie (zadanie 3)

Nie $\rightarrow$ Przechodzimy do Pytania 4

Zadanie 3. Oblicz całki nieoznaczone:

$$a) \int \frac{1}{(2x-1)^3} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \overset{+ \text{ liniowa}}{2x-1} \\ dt = 2dx \\ \frac{1}{2} dt = dx \end{array} \right\} = \int \frac{1}{t^3} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^3} dt \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2t^2} + C = -\frac{1}{4(2x-1)^2} + C$$

niezmiennik

$$b) \int \frac{x}{(1-x)^3} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = 1-x \\ dt = -dx \end{array} \right\} = - \int \frac{1-t}{t^3} dt = \int \frac{t-1}{t^3} dt = \int \left(\frac{t}{t^3} - \frac{1}{t^3} \right) dt = \int \frac{1}{t^2} dt - \int \frac{1}{t^3} dt = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} + C = -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2(1-x)^2} + C$$

$$c) \int \frac{1}{x^2+2x+1} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x+1 \\ dt = dx \end{array} \right\} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \int \frac{1}{t^2} dt \stackrel{\uparrow}{=} -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{x+1} + C$$

! $\Delta = 0$

$$d) \int \frac{1}{x^2+2x+3} dx = \int \frac{1}{x^2+2x+1+2} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+2} dx \left\{ \begin{array}{l} \text{sprawdziliśmy mianownik} \\ \text{do postaci kanonicznej} \end{array} \right\}$$

$$\int \frac{x^2}{(1-x)^3} dx \stackrel{!}{=} \left\{ \begin{array}{l} t = x+1 \\ dt = dx \end{array} \right\} = \int \frac{1}{t^2+2} dt \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

$\Delta = 4 - 12 < 0$

• **Pytanie 4:** czy funkcja podcałkowa jest postaci $\frac{ax+b}{x^2+px+q}$?

Tak $\rightarrow$ postępowanie zależy Δ mianownika

Nie $\rightarrow$... (zwykle takich całek nie liczymy na kolokwiach)

$\Delta = 0 \rightarrow$ jak w zad. 3c.

$\Delta < 0 \rightarrow$ jak w zad 3d i 4a-d

$\Delta > 0 \rightarrow$ rozkład na ułamki proste (4e-f)

Zadanie 4. Oblicz całki nieoznaczone:

$$-1 = \frac{1}{2} \cdot 2 + \boxed{?} \cdot 1$$

$$\text{a) } \int \frac{x-1}{x^2+2x+3} dx = \boxed{\frac{1}{2}} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} dx + \boxed{-2} \int \frac{1}{x^2+2x+3} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+2x+3| - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

$\Delta < 0$

{ licznik dobieramy tak, żeby zastosować wzór ② }

$$\text{b) } \int \frac{2x+4}{x^2+2x+3} dx = \boxed{1} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} dx + \boxed{2} \int \frac{1}{x^2+2x+3} dx = 1 \cdot \ln|x^2+2x+3| + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

$\Delta < 0$

$$\text{c) } \int \frac{3x-1}{x^2+4x+7} dx = \boxed{\frac{3}{2}} \int \frac{2x+4}{x^2+4x+7} dx + \boxed{-7} \int \frac{1}{x^2+4x+7} dx = \frac{3}{2} \ln|x^2+4x+7| - 7 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{x+2}{\sqrt{3}} + C$$

$\Delta = 16 - 28 < 0$

$$\int \frac{1}{x^2+4x+7} dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+3} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x+2 \\ dt = dx \end{array} \right\} = \int \frac{1}{t^2+3} dt \stackrel{③}{=} \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{t}{\sqrt{3}} + C$$

$k=3$

$$\text{d) } \int \frac{-x+4}{x^2+4x+7} dx = \dots$$

$\Delta < 0$

$$\text{e) } \int \frac{2x+4}{x^2+4x} dx$$

$\Delta > 0$

} rozkład na ułamki proste.

$$\text{f) } \int \frac{2-x}{x^2-9} dx$$

$\Delta > 0$