

15 Układy równań: twierdzenie Cramera i metoda Gaussa

Zadanie 1. Rozwiązać układ równań:

$$a) \begin{cases} x - y + z = 2 \\ y + 2z = 1 \\ x + 2y + 3z = 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} m=3 \\ n=3 \end{matrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

macierz układu

Tw. Cramera :

$m=n$
 $\det A \neq 0 \Rightarrow$ układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie

$$\det A = W = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 - 1 - 4 = -4 \neq 0, \text{ zatem}$$

układ posiada jedno rozwiązanie.

$$W_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 2 - 8 - 4 - 8 + 3 = -9$$

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{-9}{-4} = \frac{9}{4}$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$y = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$W_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$z = \frac{W_z}{W} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

Odp. $x = \frac{9}{4}, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{4}$ (warto wykonać sprawdzenie)

$$b) \begin{cases} 2x - y + z - t = 0 \\ 2x + 2z - t = 0 \\ y + 3z + t = 0 \\ z - t = 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} n=4 \\ m=4 \end{matrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{K_4 + K_3} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -(6 - 2 + 8) = -6 \neq 0$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2(-2 - 1 + 2 - 3) = +8 \quad x = \frac{W_x}{W} = \frac{8}{-6} = -\frac{4}{3}$$

$$y = -\frac{2}{3} \quad z = \frac{2}{3} \quad t = -\frac{4}{3}$$

macierz jednostkowa $J_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Metoda Gaussa.

Zadanie 2. Rozwiązać układy równań:

a)
$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ y + z = 1 \\ 2x + 4y + 6z = 8 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{W_3 - W_1} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{W_1 + W_2, W_3 - 5W_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{W_1 : 2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1.5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

STOP

$$0 = 1$$

układ sprzeczny

b)
$$\begin{cases} y + z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ 2x + 2z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{W_1 \leftrightarrow W_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{W_3 - W_1} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{W_1 + W_2, W_3 - W_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{W_1 : 2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1.5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{W_1 - W_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow x + z_0 = \frac{3}{2} \\ &\rightarrow y + z_0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{2} - z_0 \\ y &= 1 - z_0 \end{aligned}$$

układ posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru z_0 .

odp.
$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} - z_0 \\ y = 1 - z_0 \\ z = z_0 \end{cases}, z_0 \in \mathbb{R}$$

$$c) \begin{cases} 2x - y = 2 \\ x - y = 1 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & | & 2 \\ 1 & -1 & | & 1 \\ 3 & -2 & | & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{W_1 \leftrightarrow W_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[W_3 - 3W_1]{W_2 - 2W_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[W_3 - W_2]{W_1 + W_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{x=1} \\ \xrightarrow{y=0} \end{matrix}$$

Odp. Układ posiada jedno rozwiązanie: $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

$$d) \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x - y + 2z + t = 0 \\ 2x - 2y + 3z + t = 2 \end{cases}$$

tu tworzymy obrotową kolumnę macierzy jedn.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[W_3 - 2W_1]{W_2 - W_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[W_3 - W_2]{W_1 - W_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$y = y_0$ $t = t_0$

$$\begin{aligned} x - y_0 - t_0 &= 4 \Rightarrow x = 4 + y_0 + t_0 \\ 2 + t_0 &= -2 \Rightarrow z = -2 - t_0 \end{aligned}$$

Odp. Układ posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od dwóch parametrów:

$$\begin{cases} x = 4 + y_0 + t_0 \\ y = y_0 \\ z = -2 - t_0 \\ t = t_0 \end{cases} \quad , \quad y_0, t_0 \in \mathbb{R}$$