

ZBADAĆ PRZEBIEG ZMIENNOŚCI FUNKCJI f I NARYSOWAĆ JEJ WYKRES, GDY

(A) $f(x) = x - 2 \arctg x$

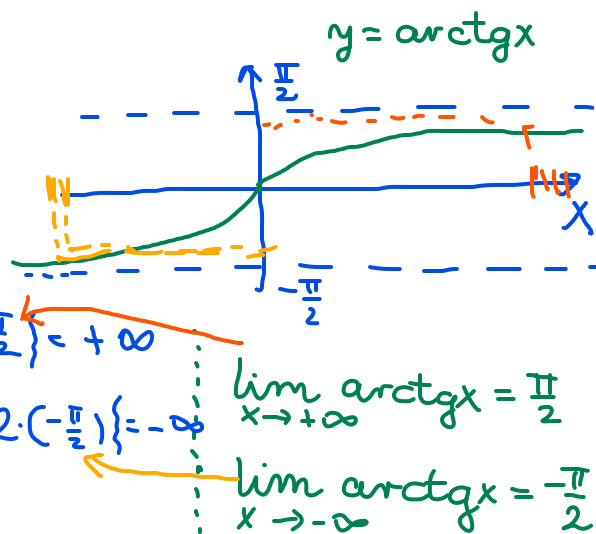
(1) Dziedzina, granice, asymptoty

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2 \arctg x) = \{+\infty - 2 \cdot \frac{\pi}{2}\} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 2 \arctg x) = \{-\infty - 2 \cdot (-\frac{\pi}{2})\} = -\infty$$

Brak asymptot pionowych



$$a_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2 \arctg x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - 2 \frac{\arctg x}{x}\right) = \left\{1 - 2 \cdot \frac{\frac{\pi}{2}}{+\infty}\right\} =$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - a_1 x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2 \arctg x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2 \arctg x) = (-2) \cdot \frac{\pi}{2} = -\pi$$

Prosta $y = x - \pi$ jest asymptotą ukośną w $+\infty$ funkcji f .

$$a_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - 2 \cdot \frac{\arctg x}{x}\right) = \left\{1 - 2 \cdot \frac{(-\frac{\pi}{2})}{-\infty}\right\} = \{1 - 2 \cdot 0\} = 1$$

$$b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - a_2 x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 2 \arctg x - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2 \arctg x) = (-2) \cdot (-\frac{\pi}{2}) = \pi$$

Prosta $y = x + \pi$ jest asymptotą ukośną w $-\infty$ funkcji f .

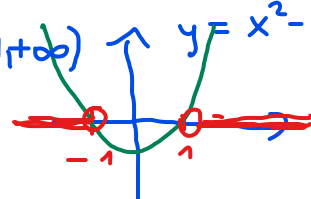
(2) Przedziały monotoniczności, ekstrema lokalne

$$f'(x) = (x - 2 \arctg x)' = 1 - 2 \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{1+x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2-1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{1+x^2} > 0 \Leftrightarrow x^2-1 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} 1+x^2 > 0$$



$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$$

(3) Przedziały wypukłości, przedziały wklęsłości i punkty przegięcia

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{x^2-1}{1+x^2} \right)' = \frac{2x(1+x^2) - (x^2-1) \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x + 2x^3 - 2x^3 + 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x}{(1+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{4x}{(1+x^2)^2} > 0 \Leftrightarrow 4x > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} (1+x^2)^2 > 0$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

(4) Tabelka

x	$-\infty$	$\dots$	-1	$\dots$	0	$\dots$	1	$\dots$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	-	-	0	+	
$f''(x)$		-	-	-	0	+	+	+	
$f(x)$	$-\infty$		$-1 + \frac{\pi}{2}$ maks. lok. w.		0 p.p.		$1 - \frac{\pi}{2}$ min. lok. w.		$+\infty$

$$f(-1) = -1 - 2 \arctg(-1) = -1 - 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 + \frac{\pi}{2} \approx \frac{1}{2}$$

$$f(1) = 1 - 2 \arctg 1 = 1 - 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{2} \approx -\frac{1}{2}$$

$$f(0) = 0 - 2 \arctg 0 = 0 - 2 \cdot 0 = 0$$

Równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie x_0 :

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$f(0) = 0, \quad f'(x) = \frac{x^2-1}{1+x^2}$$

$$f'(0) = \frac{0^2-1}{1+0^2} = \frac{-1}{1} = -1$$

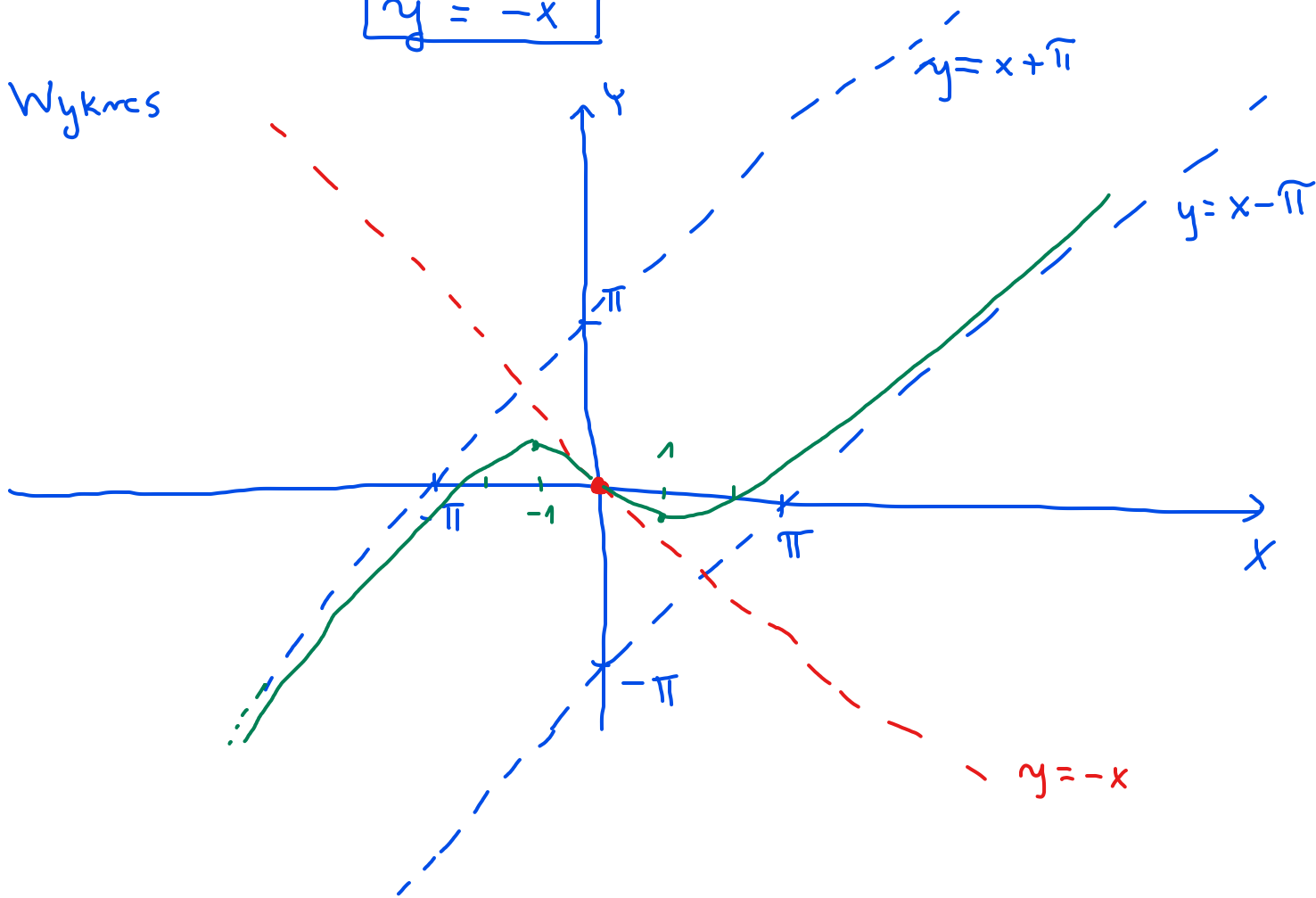
Równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $x_0 = 0$:

$$y - f(0) = f'(0) (x - 0)$$

$$y - 0 = (-1) \cdot x$$

$$\boxed{y = -x}$$

(5) Wykres



(B) $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

(1) Dziedzina, granice, asymptoty

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = \{(+\infty) \cdot e^0\} = \{(+\infty) \cdot 1\} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = \{(-\infty) \cdot e^0\} = \{(-\infty) \cdot 1\} = -\infty$$

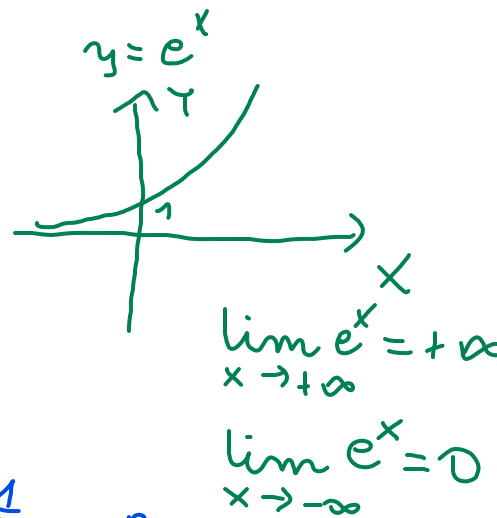
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = \{0 \cdot e^{+\infty}\} = \{0 \cdot (+\infty)\} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \left\{ \frac{+\infty}{+\infty} \right\} \stackrel{\text{S.N}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^{\frac{1}{x}})'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \{e^{+\infty}\} = +\infty$$

Prosta $x=0$ jest asymptotą pionową prawostronną funkcji f .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = \{0 \cdot e^{-\infty}\} = \{0 \cdot 0\} = 0$$



$$a_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - a_1 x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^{\frac{1}{x}} - x) = \{\infty - \infty\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x (e^{\frac{1}{x}} - 1) = \{(+\infty) \cdot 0\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{\frac{1}{x}} - 1)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

Prosta $y = x + 1$ jest asymptotą ukośną w $+\infty$ funkcji f .

$$a_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \dots = 1 \quad b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - a_2 x) = \dots = 1$$

Prosta $y = x + 1$ jest asymptotą ukośną w $-\infty$ funkcji f .

(2) Przedziały monotoniczności, ekstrema lokalne

$$f'(x) = (x e^{\frac{1}{x}})' = e^{\frac{1}{x}} + x \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2}) = e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} e^{\frac{1}{x}} > 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) > 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} > 0$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (x-1) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$$

(3) Przedziały wypukłości, przedziały wklęsłości, punkty przegięcia

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right)' = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} \right) + e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} = \\ &= e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} \left(-1 + \frac{1}{x} + 1 \right) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^3} \end{aligned}$$