

## Teoria

**Twierdzenie 1 (o całkowaniu przez części)** Jeżeli funkcje  $f$  i  $g$  mają ciągłe pochodne, to

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

**Twierdzenie 2 (o całkowaniu przez podstawienie)** Jeżeli

1. funkcja  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła na przedziale  $I$ ,
2. funkcja  $g: J \rightarrow I$  ma ciągłą pochodną na przedziale  $J$ ,

to

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt = F(g(t)) + C,$$

gdzie  $F$  jest dowolną funkcją pierwotną funkcji  $f$  oraz  $C \in \mathbb{R}$ .

## Przykłady

**Przykład 1** Całkowanie przez części:

$$\int x \sin(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x \\ g'(x) = \sin(x) \end{array} \right\} = x \cdot (-\cos(x)) - \int 1 \cdot (-\cos(x)) dx = -x \cos(x) + \int \cos(x) dx = -x \cos(x) + \sin(x) + C$$

**Przykład 2** Całkowanie przez podstawienie:

$$\int x \sin(x^2 - 3) dx = \int \sin(t^2 - 3) \cdot x dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 - 3 \\ t' dt = 2x dx \\ \frac{1}{2} dt = x dx \end{array} \right\} = \int \sin(t) \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int \sin(t) dt = -\frac{1}{2} \cos(t) + C = -\frac{1}{2} \cos(x^2 - 3) + C$$

$$\frac{x}{x-7} = \frac{x-7+7}{x-7} = \frac{x-7}{x-7} + \frac{7}{x-7}$$

**Zadanie 1** Oblicz całki (przez części):

$$\int \ln(x-7) dx = \int 1 \cdot \ln(x-7) dx = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \ln(x-7) \\ g'(x) = 1 \end{array} \right\} = x \cdot \ln(x-7) - \int x \cdot \frac{1}{x-7} dx = x \ln(x-7) - \int \left( 1 + \frac{7}{x-7} \right) dx = x \ln(x-7) - (1x + 7 \int \frac{1}{x-7} dx) = \left\{ \begin{array}{l} t = x-7 \\ dt = dx \end{array} \right\} = x \ln(x-7) - x + 7 \ln|t| + C = x (\ln(x-7) - 1) + 7 \ln|x-7| + C$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx =$$

$$\int x^3 e^{-x} dx =$$

$$N = \int e^{4x} \sin(2x) dx = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = e^{4x} \\ g'(x) = \sin(2x) \end{array} \right\} = -\frac{1}{2} e^{4x} \cos(2x) - \int 4e^{4x} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cos(2x) dx = -\frac{1}{2} e^{4x} \cos(2x) + \int 2e^{4x} \cos(2x) dx = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = 2e^{4x} \\ g'(x) = \cos(2x) \end{array} \right\} = -\frac{1}{2} e^{4x} \cos(2x) + 2e^{4x} \cdot \frac{1}{2} \sin(2x) = -\frac{1}{2} e^{4x} \cos(2x) + e^{4x} \sin(2x) = \underbrace{-\frac{1}{2} e^{4x} \cos(2x) + e^{4x} \sin(2x)}_N - \int \underbrace{e^{4x} \cdot \sin(2x)}_N dx$$

$$N = e^{4x} \left( -\frac{1}{2} \cos(2x) + \sin(2x) \right) - 4N$$

$$5N = e^{4x} \left( \sin(2x) - \frac{1}{2} \cos(2x) \right) + C \cdot 5$$

$$N = \frac{1}{5} e^{4x} \left( \sin(2x) - \frac{1}{2} \cos(2x) \right) + C$$

**Zadanie 2** Oblicz całki (przez podstawienie):

$$\int \frac{e^x}{2e^x + 5} dx =$$

$$\int x^3 \cos(x^2) dx =$$

$$\left( \sqrt{x} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\left( \ln x \right)' = \frac{1}{x}$$

**Zadanie 3** Oblicz całki:

$$\int \frac{\ln x}{x \cos^2 \ln x} dx =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt{e^x - 1} \\ t^2 = e^x - 1 \\ 2t dt = e^x dx \end{array} \right\} =$$

$$\int \frac{1}{x \sqrt{x^4 - 1}} dx = \int \frac{x^2}{x^4 \sqrt{x^4 - 1}} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt{x^4 - 1} \\ t^2 = x^4 - 1 \\ 2t dt = 4x^3 dx \end{array} \right\} =$$

$$\int \arctg \sqrt{x} dx =$$

$$\int \cos^2(\ln x) dx = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \cos^2(\ln x) \\ f'(x) = 2 \cos(\ln x) \cdot (-\sin(\ln x)) \cdot \frac{1}{x} \\ g(x) = x \end{array} \right\} = x \cdot \cos^2(\ln x) - \int 2 \cos(\ln x) \cdot (-\sin(\ln x)) \cdot \frac{1}{x} \cdot x dx = x \cos^2(\ln x) + 2 \int \cos(\ln x) \cdot \sin(\ln x) dx = x \cos^2(\ln x) + \int 1 \cdot \sin(2 \ln x) dx = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sin(2 \ln x) \\ f'(x) = \cos(2 \ln x) \cdot \frac{2}{x} \end{array} \right\} = x \cos^2(\ln x) + \frac{1}{2} x (\cos^2(\ln x) + \sin(2 \ln x) - 2 \cos(2 \ln x)) + C$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad x \in \mathbb{R}$$

$$= x \cos^2(\ln x) + \frac{1}{2} x (\cos^2(\ln x) + \sin(2 \ln x) - 2 \cos(2 \ln x)) + C$$

$$M = \int \sin(2 \ln x) dx = x \cos^2(\ln x) + x \sin(2 \ln x) - 2x \cos(2 \ln x) - 4M$$

$$5M = x \cos^2(\ln x) + x \sin(2 \ln x) - 2x \cos(2 \ln x) + 5C \quad | : 5$$

$$M = \frac{1}{5} x (\cos^2(\ln x) + \sin(2 \ln x) - 2 \cos(2 \ln x)) + C$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sin(2 \ln x) \\ f'(x) = \cos(2 \ln x) \cdot \frac{2}{x} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} g'(x) = 1 \\ g(x) = x \end{array} \right\} = x \cos^2(\ln x) + x \sin(2 \ln x) - \int \cos(2 \ln x) \cdot \frac{2}{x} \cdot x dx =$$

$$= x \cos^2(\ln x) + x \sin(2 \ln x) - 2 \int \cos(2 \ln x) dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \cos(2 \ln x) \\ f'(x) = -\sin(2 \ln x) \cdot \frac{2}{x} \\ g(x) = x \end{array} \right\} =$$

$$= x \cos^2(\ln x) + x \sin(2 \ln x) - 2 \left( x \cos(2 \ln x) - \int (-\sin(2 \ln x)) \cdot \frac{2}{x} \cdot x dx \right) =$$

$$= x \cos^2(\ln x) + x \sin(2 \ln x) - 2x \cos(2 \ln x) - 4 \int \sin(2 \ln x) dx$$