



## Teoria

**Definicja 1 (Iloczyn skalarny)** Niech  $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$  oraz  $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]$ . Iloczynem skalarnym wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  nazywamy liczbę

$$\vec{a} \circ \vec{b} := a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3.$$

**Twierdzenie 1** Dla dowolnych wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  prawdziwa jest równość

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})).$$

**Twierdzenie 2** Dla dowolnych wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  prawdziwa jest równość

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

**Definicja 2 (Iloczyn wektorowy)** Niech  $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$  oraz  $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]$ . Iloczynem wektorowym wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  nazywamy wektor

$$\vec{a} \times \vec{b} := \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \hat{k}.$$

**Twierdzenie 3** Dla dowolnych wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  mamy

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ ,
- $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$  oraz  $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$ ,
- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$ ,
- $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$ .

**Definicja 3 (Iloczyn mieszany)** Niech  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ . Iloczynem mieszanym wektorów  $\vec{a}, \vec{b}$  oraz  $\vec{c}$  nazywamy liczbę  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}$ .

**Twierdzenie 4** Dla dowolnych wektorów  $\vec{a}, \vec{b}$  i  $\vec{c}$  mamy

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

## Przykłady

**Przykład 1** Iloczyn skalarny wektorów

Niech  $\vec{a} = [1, -2, 3]$ ,  $\vec{b} = [4, -1, 0]$ .

$\vec{a} \circ \vec{b} = 1 \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 0 = 6$

**Przykład 2** Iloczyn wektorowy wektorów

Niech  $\vec{a} = [1, -2, 3]$ ,  $\vec{b} = [4, -1, 0]$ .

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \hat{k} = 3\hat{i} + 12\hat{j} + 7\hat{k} = [3, 12, 7]$$

## Zadania

**Zadanie 1** Sprawdź wzajemne położenie wektorów:

- $\vec{a} = [1, 2, 3]$ ,  $\vec{b} = [1, 1, -1]$ ;
- $\vec{a} = [2, -4, 6]$ ,  $\vec{d} = [-1, 2, -3]$ ;
- $\vec{a} = [1, -1, 0]$ ,  $\vec{f} = [0, 1, -1]$ ;
- $\vec{a} = [1, 1, 0]$ ,  $\vec{b} = [0, 1, 1]$ ,  $\vec{c} = [1, 0, 1]$ .

**Zadanie 2** Znajdź kąt pomiędzy wektorami:  $\vec{a} = [1, 1, 0]$ ,  $\vec{b} = [1, 0, -1]$ .

**Zadanie 3** Oblicz pole trójkąta  $ABC$ , którego wierzchołki znajdują się w punktach:  $A = (1, -1, 2)$ ,  $B = (3, 1, 3)$ ,  $C = (2, 2, 4)$ .

**Zadanie 4** Dany jest równoległoscian, którego jeden z wierzchołków znajduje się w początku układu współrzędnych  $O(0, 0, 0)$ , a trzy sąsiednie wierzchołki to punkty:  $A = (2, 0, 0)$ ,  $B = (1, 3, 0)$  i  $C = (1, 1, 4)$ . Oblicz objętość tego równoległoscianu.

**Zadanie 5** Na tych samych wektorach rozpięto czworoscian (piramidę o podstawie trójkątnej). Oblicz jego objętość.

**Zadanie 6** Zbadaj wzajemne położenie prostej  $l: 3 - x = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{4}$

i płaszczyzny  $\pi: \begin{cases} x = 1 + 2t + 4s, \\ y = -t + 8s \text{ gdzie } t, s \in \mathbb{R}, \\ z = 2 + 3s \end{cases}$

**Zadanie 7** Zbadaj wzajemne położenie prostej  $l: \begin{cases} x = -5 + 2t, \\ y = 1 + 3t \text{ gdzie } t \in \mathbb{R}, \\ z = 3 \end{cases}$

i płaszczyzny  $\pi: \begin{cases} x = 2 + t + 3s, \\ y = 1 - 2t + s \text{ gdzie } t, s \in \mathbb{R}, \\ z = 3 - t - s \end{cases}$

**Zadanie 8** Nowoczesna ławka parkowa ma oparcie, którego górna krawędź i punkty mocowania wyznaczają płaszczyznę oparcia. W układzie współrzędnych  $\mathbb{R}^3$  (gdzie płaszczyzna  $z = 0$  to grunt) oparcie przechodzi przez trzy punkty:  $A = (0, 0, 1)$  - punkt mocowania lewy dolny,  $B = (2, 0, 1)$  - punkt mocowania prawy dolny,  $C = (0, 1, 2)$  - lewy górny narożnik oparcia. Wyznacz wektory  $\vec{AB}$  oraz  $\vec{AC}$  leżące na płaszczyźnie oparcia. Wyznacz wektor normalny  $\vec{n}$  tej płaszczyzny. Oblicz kąt nachylenia oparcia do poziomu (płaszczyzny  $Oxy$ ).

## Zadanie 1

a)  $\vec{a} \nparallel \vec{b}$  i gdzie nie mają proporcjonalnych współrzędnych

$$\left( \frac{1}{1} = 1, \frac{2}{1} = 2 \right) \neq$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = [1, 2, 3] \circ [1, 1, -1] = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = 1 + 2 - 3 = 0$$

$$\text{zatem } \vec{a} \perp \vec{b}$$

b)  $\frac{2}{-1} = -2, \frac{-4}{-2} = 2, \frac{-6}{-3} = 2$

wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{d}$  są równoległe, gdzie mają proporcjonalne współrzędne

c)  $\vec{e} = [1, -1, 0]$ ,  $\vec{f} = [0, 1, -1]$

$$\begin{matrix} 1 \cdot 0 = 0 & ? : 0 \\ -1 \cdot 1 = -1 & ? : -1 \end{matrix} \quad \vec{e} \nparallel \vec{f}$$

$$\vec{e} \circ \vec{f} = -1 \neq 0 \Rightarrow \vec{e} \nperp \vec{f}$$

$$\text{W: } \vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})).$$

$$|\vec{e}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$|\vec{f}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

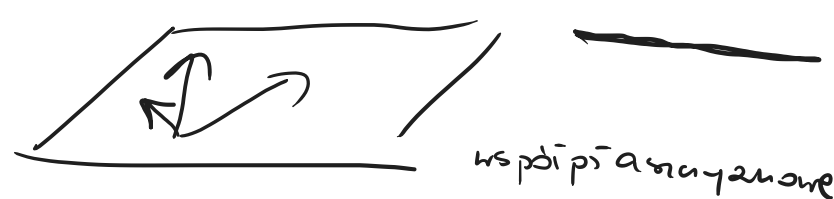
$$\vec{e} \circ \vec{f} = |\vec{e}| \cdot |\vec{f}| \cdot \cos \angle(\vec{e}, \vec{f})$$

$$\cos \angle(\vec{e}, \vec{f}) = \frac{\vec{e} \circ \vec{f}}{|\vec{e}| \cdot |\vec{f}|}$$

$$\cos \angle(\vec{e}, \vec{f}) = \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$$

d)  $\vec{a} = [1, 1, 0]$ ,  $\vec{b} = [0, 1, 1]$ ,  $\vec{c} = [1, 0, 1]$ .

$$\begin{matrix} \vec{g} \circ \vec{h} = 1 & \vec{g} \text{ i } \vec{h} & \text{nie są } \perp, \text{ nie są } \parallel \\ \vec{g} \circ \vec{c} = 1 & \vec{g} \text{ i } \vec{c} & \text{nie są } \perp, \text{ nie są } \parallel \\ \vec{c} \circ \vec{h} = 1 & \vec{c} \text{ i } \vec{h} & \text{nie są } \perp, \text{ nie są } \parallel \end{matrix}$$



$$(\vec{g}, \vec{h}, \vec{n}) = (\vec{g} \times \vec{h}) \circ \vec{n}$$

$$\vec{g} \times \vec{h} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \hat{k} = \hat{i} - \hat{j} + 0\hat{k} = [1, -1, 0]$$

$$\vec{g} \times \vec{h} = \begin{bmatrix} \left| \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right| & -\left| \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right| & \left| \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\vec{g} \times \vec{h}) \circ \vec{c} = [1, -1, 1] \circ [1, 0, 1] = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

Wektorów  $\vec{g}, \vec{h}, \vec{c}$  nie są współplanarne.

**Zadanie 2** Znajdź kąt pomiędzy wektorami:  $\vec{a} = [1, 1, 0]$ ,  $\vec{b} = [1, 0, -1]$ .

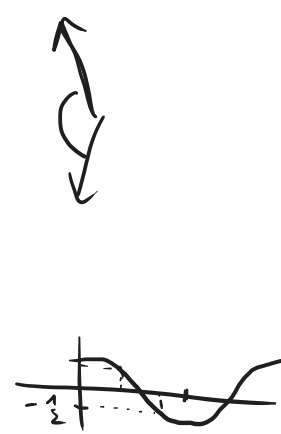
$$\vec{a} \circ \vec{b} = 1$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{2}$$

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$$



**Zadanie 3** Oblicz pole trójkąta  $ABC$ , którego wierzchołki znajdują się w punktach:  $A = (1, -1, 2)$ ,  $B = (3, 1, 3)$ ,  $C = (2, 2, 4)$ .

$$\vec{AB} = [3-1, 1-(-1), 3-2] = [2, 2, 1]$$

$$\vec{AC} = [2-1, 2-(-1), 4-2] = [1, 3, 2]$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 & -[2 \cdot 2 - 1 \cdot 1] & 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 5^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1+9+25} = \frac{1}{2} \sqrt{35}$$

**Zadanie 4** Dany jest równoległoscian, którego jeden z wierzchołków znajduje się w początku układu współrzędnych  $O(0, 0, 0)$ , a trzy sąsiednie wierzchołki to punkty:  $A = (2, 0, 0)$ ,  $B = (1, 3, 0)$  i  $C = (1, 1, 4)$ . Oblicz objętość tego równoległoscianu.

$$\vec{OA} = [2, 0, 0], \vec{OB} = [1, 3, 0], \vec{OC} = [1, 1, 4]$$

$$V = \left| \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot 4 \right| = \left| 2 \cdot 3 \cdot 4 \right| = 24$$

$$\text{Zatem } V = 24$$

**Zadanie 6** Zbadaj wzajemne położenie prostej  $l: 3 - x = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{4}$

i płaszczyzny  $\pi: \begin{cases} x = 1 + 2t + 4s, \\ y = -t + 8s \text{ gdzie } t, s \in \mathbb{R}, \\ z = 2 + 3s \end{cases}$

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-0}{4}$$

$$P = (3, -1, 0) \quad P \in l$$

$$\vec{a} = [-1, -2, 4] \quad \vec{a} \parallel l$$

$$\vec{b} = [2, -1, 0] \quad \vec{c} = [4, 3, 5]$$

$$\vec{b} \parallel \pi$$

$$\vec{a} \nparallel \vec{b} \quad \vec{a} \nparallel \vec{c} \quad \vec{b} \nparallel \vec{c}$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = -2 + 2 + 0 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\vec{a} \circ \vec{c} = -4 - 16 + 20 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{c}$$

$$\vec{b} \circ \vec{c} = 8 - 8 + 0 = 0 \Rightarrow \vec{b} \perp \vec{c}$$

$$\text{Zatem } l \perp \pi$$

$$(\vec{b} \times \vec{c}) \parallel \vec{a}$$

