Teoria

Definicja 1 **Argumentem** liczby zespolonej

$$z = x + iy \neq 0,$$

gdzie x, $y \in \mathbb{R}$ nazywamy każdą liczbę $\varphi \in \mathbb{R}$ spełniającą układ równań:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{x}{|z|} \\ \sin\varphi = \frac{y}{|z|}. \end{cases}$$

Definicja 2 • **Argumentem głównym** liczby zespolonej $z \neq 0$ nazywamy argument φ tej liczby spełniający nierówność:

$$0 \leq \varphi < 2\pi.$$

$\frac{\frac{\pi}{2}+0\cdot 2\pi}{3}$

$\frac{\frac{\pi}{2}+1\cdot 2\pi}{3}$

$\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 2\pi}{3}$

- Argument główny liczby zespolonej z oznaczamy $\operatorname{Arg} z$.
- Każdy argument φ liczby zespolonej $z \neq 0$ ma postać:

$$\varphi = \operatorname{Arg} z + 2k\pi, \quad gdzie \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

Definicja 3 Każdą liczbę zespoloną różną od zera można przedstawić w postaci:

$$z = |\, z \,| \,(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

gdzie φ jest argumentem głównym liczby z.
Postać tę nazywamy **postacią trygonometryczną** liczby zespolonej.

Definicja 4 (Pierwiastek z liczby zespolonej) **Pierwiastkiem stopnia** $n \in \mathbb{N}$ z liczby zespolonej z nazywamy każdą liczbę zespoloną ω spełniającą równość:

$$\omega^n = z.$$

Twierdzenie 1 Niech $n \in \mathbb{N}$. Każda liczba zespolona

$$z = |\, z \,| \,(cos\varphi + isin\varphi)$$

różna od zera ma dokładnie n pierwiastków stopnia n postaci:

$$z_k = \sqrt[n]{|\, z \,|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

dla $k = 0, 1, ..., n-1$.

Konsultacje online - 20.01.2026

Równania w dziedzinie zespolonej

Przykłady

Przykład 1 Rozwiążemy równania:

a) $z^2 - 4z + 13 = 0.$
$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 13 = 16 - 52 = -36$
$\sqrt{\Delta} = \{-6i, 6i\}$
$z_1 = \frac{4-6i}{2} = 2 - 3i, \quad z_2 = \frac{4+6i}{2} = 2 + 3i$

b) $z^3 = 8i$
$|z| = 8$
$\varphi = \frac{\pi}{2}$
$z_0 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi/2}{3} + i\sin\frac{\pi/2}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$
$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi/2+2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi/2+2\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i$
$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi/2+4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi/2+4\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right) = 2(0 - i) = -2i$

$8i = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

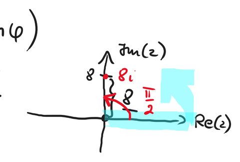
$z \in \{-2i, -\sqrt{3}+i, \sqrt{3}+i\}$

$i^2 = -1$

$z^3 - 8i = 0$

$w = x_w + iy_w$
$|w| = \sqrt{x_w^2 + y_w^2}$ – jest to odległość w od 0
$\operatorname{Arg} w = \varphi$
$w = |w| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$|0 + 8i| = \sqrt{0^2 + 8^2} = \underline{8}$



Zadania

Zadanie 1 Rozwiąż równania:

a) $z^2 + 2z + 5 = 0$
b) $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$
c) $(z-1)(z^2 + z + 1) = 0$
d) $(1+i)z^2 + 2z + (1-i) = 0$
e) $iz^2 + 4z - 5i = 0$
f) $z^2 + (1+i)z + \left(\frac{3}{4}i - \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \Delta = \underline{(1+i)^2} - 4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{3}{4}i - \frac{1}{2}\right) = 2i - (3i - 2) = 2i - 3i + 2 = 2 - i$
g) $2z + \bar{z} = 6 - i$
h) $z \cdot \bar{z} + 2z = 3 + 4i$
i) $z^3 = -2 + 2i$

$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = \underline{\underline{2i}}$

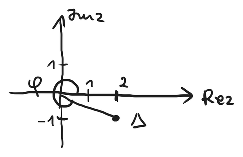
a) $z^2 + 2z + 5 = 0$
$\Delta = -16 \qquad \sqrt{\Delta} = \{4i, -4i\}$
$z_1 = \frac{-2-4i}{2} \qquad z_2 = \frac{-2+4i}{2}$
$z \in \{-1-2i, -1+2i\}$

b) $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$
$t = z^2$
$t^2 + 5t + 4 = 0$
$\Delta = 9 \qquad \sqrt{\Delta} = \{3, -3\}$
$t_1 = \frac{-5-3}{2} = -4 \qquad t_2 = \frac{-5+3}{2} = -1$
$z^2 = -4 \quad \vee \quad z^2 = -1$
$z = 2i \vee z = -2i \quad \vee \quad z = i \quad \vee \quad z = -i$

c) $(z-1)(z^2 + z + 1) = 0$
$z - 1 = 0 \quad \vee \quad z^2 + z + 1 = 0$
$z = 1 \quad \vee \qquad \Delta = -3 \qquad \sqrt{\Delta} = \{-\sqrt{3}i, \sqrt{3}i\}$
$z = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \quad \vee \quad z = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$
$z \in \{1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$

d) $(1+i)z^2 + 2z + 1 - i = 0$
$\Delta = 4 - 4(1+i)\cdot(1-i) = 4 - 4(1^2 - i^2) = 4 - 4(1+1) = 4 - 8 = -4$
$\sqrt{\Delta} = \{-2i, 2i\}$
$z_1 = \frac{-2-2i}{2(1+i)} = \frac{-2\cancel{(1+i)}}{2\cancel{(1+i)}} = -1 \qquad z_2 = \frac{-2+2i}{2(1+i)} = \frac{-\cancel{2}(1-i)}{\cancel{2}(1+i)} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{-(1-i)^2}{1^2 - i^2} = \frac{-(1-2i+i^2)}{1-(-1)} = \frac{-(1-2i-1)}{2} = \frac{2i}{2} = i$
sprzężenie
$z \cdot \bar{z} = |z|^2$
$z \in \{-1, i\}$

f) $\Delta = 2 - i$
$|\Delta| = \sqrt{5}$



$\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$
$\varphi = \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sqrt{\Delta} = x + iy \qquad x, y \in \mathbb{R}$
$(\sqrt{\Delta})^2 = \Delta$
$(x+iy)^2 = 2 - i$
$x^2 + 2xyi + (iy)^2 = 2 - i$
$x^2 + 2xyi - y^2 = 2 - i$
$(x^2 - y^2) + (2xy) \cdot i = 2 - 1 \cdot i$

$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ 2xy = -1 \end{cases} \qquad x \neq 0 \wedge y \neq 0$
$\Downarrow$
$x = -\frac{1}{2y}$

$\left(-\frac{1}{2y}\right)^2 - y^2 = 2$
$\frac{1}{4y^2} - y^2 = 2 \quad | \cdot 4y^2$
$1 - 4y^4 = 8y^2$
$-4y^4 - 8y^2 + 1 = 0$

$t = y^2$
$-4t^2 - 8t + 1 = 0$
$\Delta_t = 64 + 16 = 80$
$\sqrt{\Delta_t} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$
$t_1 = \frac{8 - 4\sqrt{5}}{-8} = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{5} \qquad t_2 = -1 - \frac{1}{2}\sqrt{5}$
$y^2 = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{5} \quad \vee \quad y^2 = -1 - \frac{1}{2}\sqrt{5}$
$-1 + \frac{1}{2}\sqrt{5} > 0 \qquad$ sprzeczne, bo $-1 - \frac{1}{2}\sqrt{5} < 0$

$\begin{cases} y = \sqrt{-1 + \frac{1}{2}\sqrt{5}} \\ x = -\frac{1}{2\sqrt{-1+\frac{1}{2}\sqrt{5}}} \end{cases} \vee \begin{cases} y = -\sqrt{-1 + \frac{1}{2}\sqrt{5}} \\ x = \frac{1}{2\sqrt{-1+\frac{1}{2}\sqrt{5}}} \end{cases} \qquad x = -\frac{1}{2y}$

$\sqrt{\Delta} = x + iy$

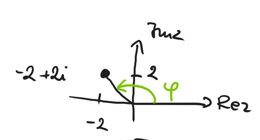
$\sqrt{\Delta} = -\frac{1}{2\sqrt{-1+\frac{1}{2}\sqrt{5}}} + i\sqrt{-1+\frac{1}{2}\sqrt{5}} \quad \vee \quad \sqrt{\Delta} = \frac{1}{2\sqrt{-1+\frac{1}{2}\sqrt{5}}} - i\sqrt{-1+\frac{1}{2}\sqrt{5}}$

$z = \frac{-(1+i) + \frac{1}{2\sqrt{-1+\frac{1}{2}\sqrt{5}}} - i\sqrt{-1+\frac{1}{2}\sqrt{5}}}{2} \quad \vee \quad z = \frac{-(1+i) - \frac{1}{2\sqrt{-1+\frac{1}{2}\sqrt{5}}} + i\sqrt{-1+\frac{1}{2}\sqrt{5}}}{2}$

g) $2z + \bar{z} = 6 - i$
$z = x + iy, \qquad x, y \in \mathbb{R}$
$2(x+iy) + \overline{(x+iy)} = 6 - i$
$2x + 2yi + x - yi = 6 - i$
$3x + y \cdot i = 6 - 1 \cdot i$
$\begin{cases} 3x = 6 \\ y = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$
$z = 2 - i$

h) $z \cdot \bar{z} + 2z = 3 + 4i$
$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$
$(x+iy)(x-iy) + 2(x+iy) = 3 + 4i$
$x^2 + y^2 + 2x + 2iy = 3 + 4i$
$x^2 + 2x + y^2 + 2y \cdot i = 3 + 4i$
$\begin{cases} x^2 + 2x + y^2 = 3 \\ 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow y = 2$
$x^2 + 2x + 1 = 0$
$(x+1)^2 = 0$
$x = -1$
$z = -1 + 2i$

i) $z^3 = -2 + 2i$



$|-2+2i| = 2\sqrt{2}$
$\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$

$-2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$

$z_0 = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{3}{4}\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3}{4}\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \ldots$

$z_1 = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{3}{4}\pi + 1\cdot 2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3}{4}\pi + 2\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{11}{12}\pi + i\sin\frac{11}{12}\pi\right)$

$z_2 = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{3}{4}\pi + 2\cdot 2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3}{4}\pi + 4\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{19}{12}\pi + i\sin\frac{19}{12}\pi\right)$

$+\frac{8}{12}\pi \qquad +\frac{8}{12}\pi \qquad +\frac{8}{12}\pi$

$\frac{\frac{3}{4}\pi + \frac{8}{4}\pi}{3} = \frac{\frac{11}{4}\pi}{3} = \frac{11}{12}\pi$

$\frac{27}{12}\pi = 2\pi + \frac{3}{12}\pi$
$2\pi + \frac{1}{4}\pi$

$\frac{\frac{3}{4}\pi + \frac{16}{4}\pi}{3} = \frac{19}{12}\pi$