

Teoria

**Twierdzenie 1** Każdą funkcję wymierną da się rozłożyć na sumę ułamków prostych:

- I-ego rodzaju:  $\frac{A}{(x-a)^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- lub
- II-ego rodzaju:  $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ , gdzie  $\Delta = p^2 - 4q < 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A, B, p, q \in \mathbb{R}$ ,  $A^2 + B^2 \neq 0$ .

Całki  $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx$  liczymy przez podstawienie  $t = x - a$ .  
Całki  $\int \frac{dx}{x^2 + t}$ ,  $h > 0$ , liczymy przez podstawienie  $t = \frac{x}{\sqrt{h}}$ .  
Całki  $\int \frac{dx}{x^2 + px + q}$  sprowadzamy do poprzedniego typu zapisując mianownik w postaci kanonicznej.  
Całki  $\int \frac{dx}{x^2 + px + q}$  sprowadzamy do poprzedniego typu zapisując mianownik w postaci kanonicznej.  
Całki  $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx$ ,  $\Delta < 0$ , wyrażamy jako kombinację dwóch całek:  
 $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = n \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \beta \int \frac{dx}{x^2+px+q}$   
gdzie  $\alpha, \beta$  spełniają warunki  $Ax+B = \alpha(x^2+px+q) + \beta$ .  
Całki  $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx$ , gdzie  $\Delta < 0$ , liczymy wykorzystując: wzór rekurencyjny:  
 $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+q)^n} = \frac{1}{2n(n-1)} \left( \frac{x}{(x^2+q)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n(n-1)} I_{n-1} \right)$ ,  $n = 2, 3, \dots$

- Schemat całkowania funkcji wymiernych:**  
START: Masz funkcję wymierną  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ .  
• KROK 1 (Decyzja): Czy stopień licznika jest mniejszy niż stopień mianownika?  
o NIE: Funkcja wymierna. Wykonaj Dzielone Wielomianów (Krok 2).  
o TAK: Przejść dalej (Krok 3).  
• KROK 2: Zapisz funkcję jako  $W(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ , gdzie  $R(x) < Q(x)$  jest już ułamkiem.  
• KROK 3 (Decyzja): Czy postać funkcji pozwala na natychmiastowe całkowanie (czy jest to już ułamek prosty)?  
o NIE: Wykonaj Rozkład na ułamki proste (Krok 4).  
o TAK: Przejść do wykoru wzoru (Krok 5).  
• KROK 4: Wykorzystaj metody współczynnika nieoznaczonego, aby rozbić funkcję na sumę prostszych ułamków.  
• KROK 5 (Decyzja): Rodzaj ułamka prostego:  
o Rodzaj I: Postać  $\frac{A}{(x-a)^n}$ . Przejść do Kroku 6.  
o Rodzaj II: Postać  $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$  (mianownik nierozkładalny). Przejść do Kroku 7.  
• KROK 6: Zastosuj wzór na logarytm naturalny lub funkcję potęgową.  
• KROK 7: Sprowadź do postaci  $\int \frac{dx}{x^2+a}$  lub wzór rekurencyjny.

Zadania

- Zadanie 1** Oblicz całki
1. Ułamek prosty I rodzaju (wykludź  $n = 1$ )  
 $\int \frac{dx}{x-a}$
  2. Ułamek prosty I rodzaju (wykludź  $n > 1$ )  
 $\int \frac{dx}{(x-a)^n}$
  3. Ułamek prosty II rodzaju (postać podstawowa)  
 $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$
  4. Ułamek prosty II rodzaju (skłócenie do kwadratu)  
 $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$
  5. Ułamek prosty II rodzaju (z liniowym licznikiem)  
 $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx$
  6. Funkcja wymierna ułamkowa (2 różne ułamki I rodzaju)  
 $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$
  7. Funkcja wymierna ułamkowa (3 ułamki I rodzaju – mianownik wielokrotny)  
 $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)}$

- Całki nieoznaczone - całkowanie funkcji wymiernych
1.  $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3} dx$   
2. Funkcja wymierna ułamkowa (mieszaną rozkład I i II rodzaju)  
 $\int \frac{5x^2-4x+13}{(x-1)(x^2+4)} dx$   
3.  $\int \frac{2x+5}{x^2-1} dx$   
4.  $\int \frac{x^2+3x+5}{x^2-1} dx$

$m < m$

$\frac{W_n(x)}{P_m(x)}$

$\frac{1}{x^2+1}$

$\frac{1}{x^2+1}$

$\frac{1}{x^2+1}$

1.  $\int \frac{1}{3x-2} dx = \int \frac{1}{3(x-\frac{2}{3})} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-\frac{2}{3}} dx = \frac{1}{3} \ln|x-\frac{2}{3}| + C = \frac{1}{3} \ln|3x-2| + C$

2.  $\int \frac{2}{(5x+1)^4} dx = \int \frac{2}{5^4(x+\frac{1}{5})^4} dx = \frac{2}{5^4} \int \frac{1}{(x+\frac{1}{5})^4} dx = \frac{2}{5^4} \int \frac{1}{t^4} dt = \frac{2}{5^4} \int t^{-4} dt = \frac{2}{5^4} \frac{t^{-3}}{-3} + C = -\frac{2}{3 \cdot 5^4} \frac{1}{(5x+1)^3} + C$

3.  $\int \frac{3}{x^2+25} dx = 3 \int \frac{1}{25(\frac{x^2}{25}+1)} dx = \frac{3}{25} \int \frac{1}{(\frac{x}{5})^2+1} d(\frac{x}{5}) = \frac{3}{25} \int \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{3}{25} \arctg(t) + C = \frac{3}{25} \arctg(\frac{x}{5}) + C$

4.  $\int \frac{3}{x^2+4x+13} dx = \int \frac{3}{(x+2)^2+9} dx = \int \frac{3}{9(\frac{(x+2)^2}{9}+1)} dx = \int \frac{1}{3(\frac{(x+2)^2}{9}+1)} d(\frac{x+2}{3}) = \int \frac{1}{t^2+1} dt = \arctg(t) + C = \arctg(\frac{x+2}{3}) + C$

5.  $\int \frac{x-3}{x^2+16} dx = \int \frac{\frac{1}{2}2x-3}{x^2+16} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+16} dx - 3 \int \frac{1}{x^2+16} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+16} dx - 3 \int \frac{1}{x^2+16} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+16| - \frac{3}{4} \int \frac{1}{(\frac{x}{4})^2+1} d(\frac{x}{4}) = \frac{1}{2} \ln|x^2+16| - \frac{3}{4} \arctg(\frac{x}{4}) + C = \frac{1}{2} \ln|x^2+16| - \frac{3}{4} \arctg(\frac{x}{4}) + C$

6.  $\int \frac{2x+3}{x^2-3x+2} dx = \int (\frac{-5}{x-1} + \frac{7}{x-2}) dx = -5 \ln|x-1| + 7 \ln|x-2| + C$

$\Delta = 9 - 4 \cdot 2 = 1 > 0 \Rightarrow x_1 = \frac{3+1}{2} = 2, x_2 = \frac{3-1}{2} = 1$  ułamkiem prostym

$\frac{2x+3}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{-5}{x-1} + \frac{7}{x-2}$

Porównujemy mianiki:

$2x+3 = A(x-2) + B(x-1)$

$x=2: 4+3=0A+1B \Rightarrow B=7$

$x=1: 2+3=-A+0B \Rightarrow A=-5$

8.  $\int \frac{5x^2-4x+13}{(x-1)(x^2+4)} dx$

$\frac{5x^2-4x+13}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{A(x^2+4)+(x-1)(Bx+C)}{(x-1)(x^2+4)}$

$5x^2-4x+13 = A(x^2+4) + (x-1)(Bx+C)$

$x=1: 5-4+13=5A+0 \Rightarrow 5A=14 \Rightarrow A=\frac{14}{5}$

$x^2: 5= A+B \Rightarrow B=5-\frac{14}{5}=\frac{11}{5}$

$x^0: 13=4A-C \Rightarrow C=4\frac{14}{5}-13=\frac{14}{5}$