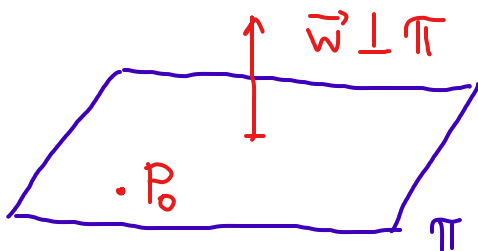


Prosta i płaszczyzna

RÓWNANIE OGÓLNE PŁASZCZYZNY : $Ax + By + Cz + D = 0$,
gdzie $\vec{w} = [A, B, C]$ jest wektorem prostopadłym
do płaszczyzny i $A^2 + B^2 + C^2 > 0$

(1) Napisać równanie ogólne płaszczyzny prostopadłej do wektora

$\vec{w} = [3, -2, 4]$, przechodzącej przez punkt $P_0 = (2, 1, 1)$.



Ponieważ $\vec{w} \perp \pi$, więc

$$\pi: 3x + (-2)y + 4z + D = 0$$

Ponieważ $P_0 \in \pi$, więc

$$3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + D = 0, \text{ stąd } D = -8$$

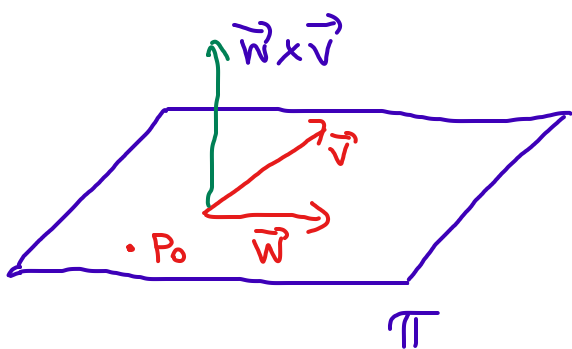
$$\pi: 3x - 2y + 4z - 8 = 0$$

(2) Napisać równania ogólne i odcinkowe płaszczyzny,

przechodzącej przez punkt $P_0 = (1, -2, 0)$ i równoległej do wektorów

$\vec{w} = [-2, 2, 1]$ i $\vec{v} = [3, 4, -1]$.

Narysować ją w prostokątnym układzie współrzędnych.



$$\begin{aligned} \vec{w} \times \vec{v} &= \left[\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right] = \\ &= [-6, 1, -14] \end{aligned}$$

Ponieważ $\vec{w} \times \vec{v} \perp \pi$, więc

$$\pi: -6x + y - 14z + D = 0$$

Ponieważ $P_0 \in \pi$, więc

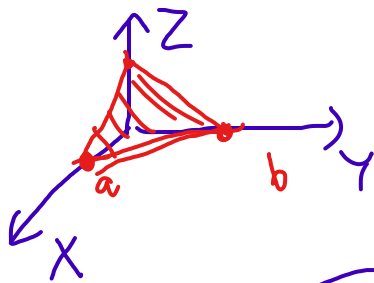
$$(-6) \cdot 1 - 2 - 14 \cdot 0 + D = 0,$$

$$\text{stąd } D = 8$$

Równanie ogólne płaszczyzny π : $-6x + y - 14z + 8 = 0$

$$\begin{aligned} -6x + y - 14z &= -8 \\ \frac{6}{8}x - \frac{1}{8}y + \frac{14}{8}z &= 1 \end{aligned}$$

RÓWNANIE ODCINKOWE PŁASZCZYZNY: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$
 $(a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0)$



Równanie odcinkowe płaszczyzny Π :

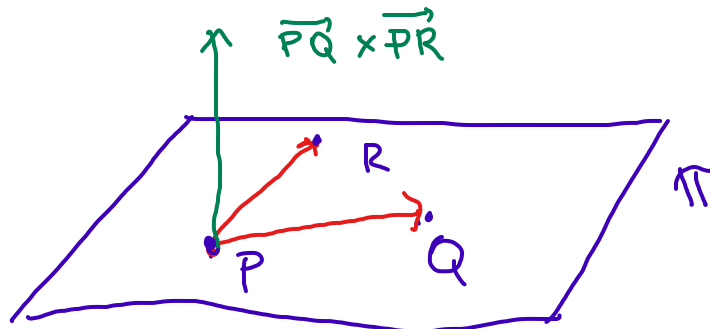
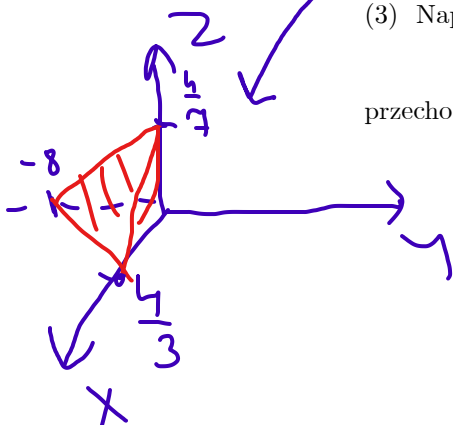
$$\frac{x}{\frac{4}{3}} + \frac{y}{(-8)} + \frac{z}{\frac{4}{7}} = 1$$

→ stąd wiadomo

(3) Napisać równania parametryczne, ogólne i odcinkowe płaszczyzny,

przechodzącej przez punkty $P = (2, -1, 3)$, $Q = (1, 1, 4)$, $R = (3, 0, 1)$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{3}, 0, 0\right) &\in \Pi \\ (0, -8, 0) &\in \Pi \\ (0, 0, \frac{4}{7}) &\in \Pi \end{aligned}$$



RÓWNANIA PARAMETRYCZNE Π :

$$\vec{PQ} = [-1, 2, 1]$$

$$\vec{PR} = [1, 1, -2]$$

$$\begin{cases} x = 2 + (-1)t + 1s \\ y = -1 + 2t + 1s \\ z = 3 + 1t + (-2)s \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R}$$

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{bmatrix} | \begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix} |, -| \begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix} |, | \begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} | \end{bmatrix} = [-5, -1, -3]$$

Wiadomo, że $\vec{PQ} \times \vec{PR} \perp \Pi$, więc

$$\Pi: -5x - y - 3z + D = 0$$

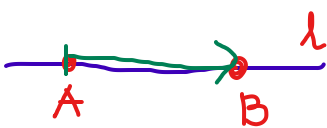
Ponieważ $P \in \Pi$, więc $(-5) \cdot 2 + 1 - 9 + D = 0$, stąd $D = 18$

RÓWNANIE OGÓLNE PŁASZCZYZNY Π : $-5x - y - 3z + 18 = 0$

RÓWNANIE ODCINKOWE PŁASZCZYZNY Π - SAMODZIELNIE

(4) (a) Napisać równania parametryczne, kierunkowe i krawędziowe

prostej l przechodzącej przez punkty $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, -1, 4)$.



$$\vec{AB} \parallel l$$

$$\vec{AB} = [2, -3, 1]$$

Równania parametryczne prostej l :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + (-3)t \\ z = 3 + 1t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Równania kierunkowe prostej l :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{1}$$

Równania krawędziowe prostej l :

$$\begin{cases} -3x - 2y + 7 = 0 \\ y + 3z - 11 = 0 \end{cases}$$

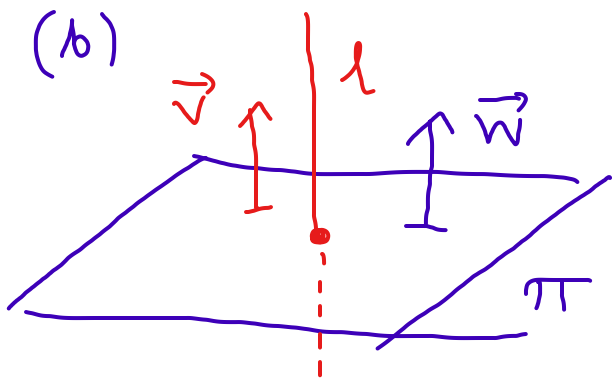
(b) Czy prosta l jest prostopadła (równoległa) do płaszczyzny

$\pi: 3x + y - z + 2 = 0$? Odpowiedź uzasadnić.

(c) Czy prosta l jest prostopadła (równoległa) do prostej

$k: 2 - x = 2y - 1 = \frac{1}{3}z + 1$? Odpowiedź uzasadnić.

(b)



$$\vec{w} \perp \pi \quad \vec{w} = [3, 1, -1]$$

$$\vec{v} \parallel l$$

$$l \perp \pi \Leftrightarrow \vec{w} \parallel \vec{v}$$

$$\vec{w} \perp \pi$$

$$\vec{v} \parallel l$$

$$l \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{w} \perp \vec{v}$$

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = \dots$$

(c)

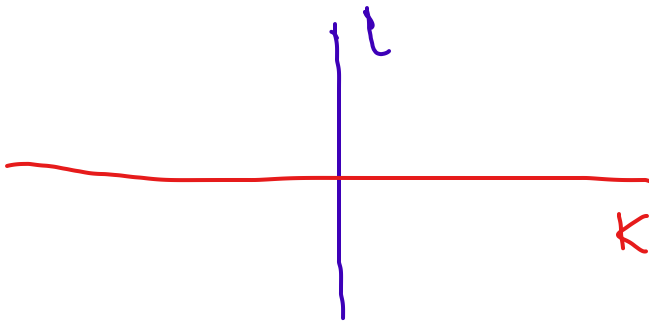


$$\vec{v} \parallel l$$



$$\vec{w} \parallel k$$

$$l \parallel k \Leftrightarrow \vec{v} \parallel \vec{w}$$

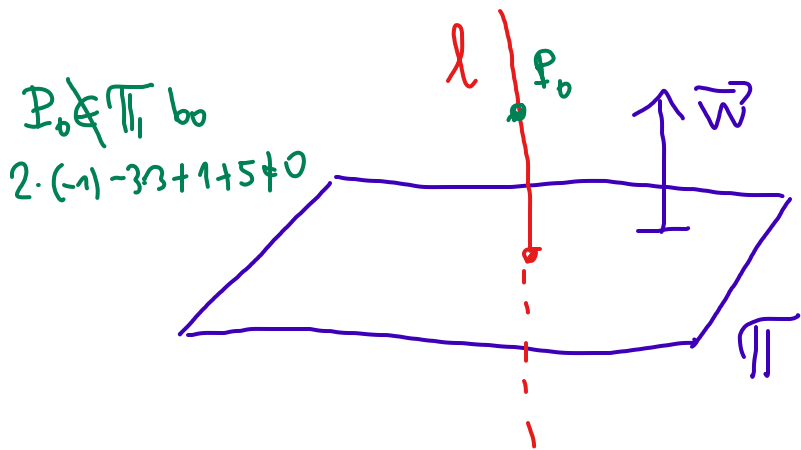


$$l \perp K \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{w}$$

(5) Napisać równania parametryczne, kierunkowe i krawędziowe

prostej l przechodzącej przez punkt $P_0 = (-1, 3, 1)$ i prostopadłej

do płaszczyzny $\pi : 2x - 3y + z + 5 = 0$.



$$\vec{w} = [2, -3, 1]$$

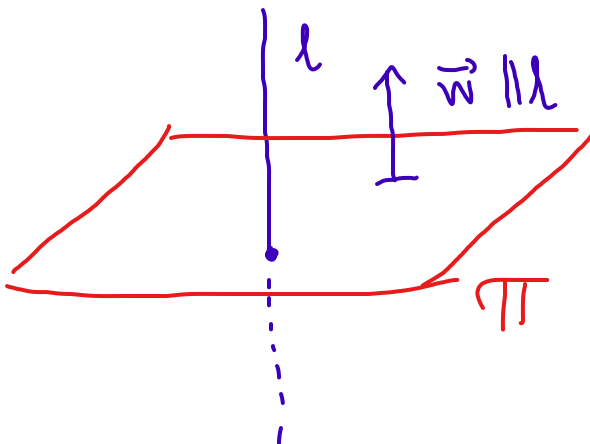
$$\vec{w} \perp \pi$$

Ponieważ $\vec{w} \perp \pi$ i $l \perp \pi$, więc $\vec{w} \parallel l$

(6) Napisać równania ogólne i odcinkowe płaszczyzny π

przechodzącej przez punkt $P_0 = (1, -2, 0)$ i prostopadłej do

prostej $l : 2x - 1 = 3 - y = z$.



Ponieważ $\vec{w} \parallel l$ i $\pi \perp l$,
więc $\vec{w} \perp \pi$

