

27 Powtórka przed egzaminem. Wielomian Taylora. Sumy całkowite.

Wielomian Taylora/Maclaurina

$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$ w otoczeniu ustalonego punktu x_0 (przy założeniach twierdzenia: Wzór Taylora !)

$P_n(x)$ – wielomian Taylora przybliża funkcję f w otoczeniu punktu x_0

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Zadanie 1. Napisz wielomian Taylora stopnia drugiego dla funkcji $f(x) = \ln^2 x$ dla $x_0 = 1$.

$$P_2(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1} (x-1) + \frac{f''(1)}{2} (x-1)^2$$

$$f'(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x}$$

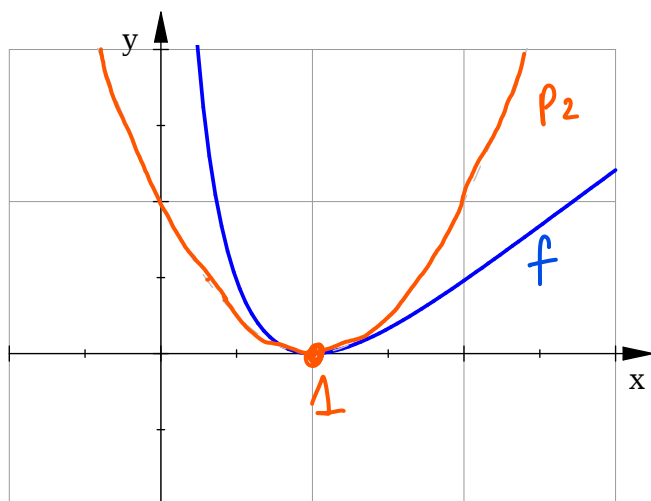
$$f''(x) = \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{x} + 2\ln x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$f(1) = \ln^2 1 = 0$$

$$f'(1) = 0$$

$$f''(1) = 2 + 0$$

$$P_2(x) = 0 + 0(x-1) + \frac{2}{2} (x-1)^2 = (x-1)^2$$



wielomian Maclaurina = wielomian Taylora dla $x_0 = 0$

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, n \in \mathbb{N}$$

Zadanie 2. Napisz wielomian Maclaurina stopnia n dla funkcji f :

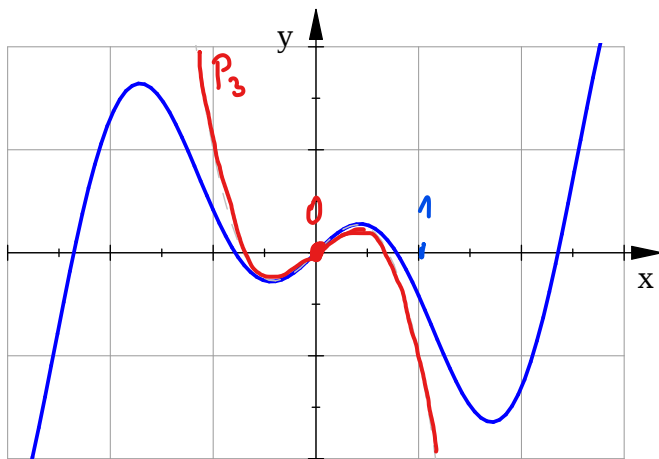
a) $f(x) = x \cos 2x, n = 3$

$$P_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

$$f(0) = 0 \cdot \cos 0 = 0 \quad f'(x) = \cos 2x + x \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 \quad f''(x) = -\sin 2x \cdot 2 - 2(\sin 2x + x \cos 2x \cdot 2)$$

$$f'(0) = \cos 0 + 0 = 1 \quad f''(0) = 0 - 2(0 + 0) = 0$$

$$P_3(x) = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \frac{-12}{6}x^3 = x - 2x^3$$



$$f''(x) = -4 \sin 2x - 4x \cos 2x$$

$$f'''(x) = -8 \cos 2x - 4(\cos 2x - 2x \sin 2x)$$

$$f'''(0) = -8 - 4 = -12$$

b) $f(x) = e^{2x}, n = 4$

$$P_4(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4$$

$$f(0) = e^0 = 1 \quad f'(x) = e^{2x} \cdot 2 \quad f''(x) = e^{2x} \cdot 4 \quad f'''(x) = e^{2x} \cdot 8 \quad f^{(4)}(x) = e^{2x} \cdot 16$$

$$f'(0) = 2 \quad f''(0) = 4 \quad f'''(0) = 8 \quad f^{(4)}(0) = 16$$

$$P_4(x) = 1 + 2x + \frac{4}{2}x^2 + \frac{8}{6}x^3 + \frac{16}{24}x^4 = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4$$

Zauważ. $e^2 = f(1) \approx P_4(1) = 1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 7$

Sumy całkowite

$[a, b]$ – ustalony przedział

$\bar{S}_n$ – górna suma całkowita funkcji f na $[a, b]$

$\underline{S}_n$ – dolna suma całkowita funkcji f na $[a, b]$

Jeśli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$, to sumy całkowite przybliżają wartość całki oznaczonej $\int_a^b f(x)dx$, przy czym

$$\underline{S}_n \leq \int_a^b f(x)dx \leq \bar{S}_n$$

Zadanie 3. Napisz górną i dolną sumę całkowitą S_3 dla funkcji $f(x) = 1 - x^2$ i równomiernego podziału przedziału $[-1, 2]$. Podaj ich interpretację geometryczną.

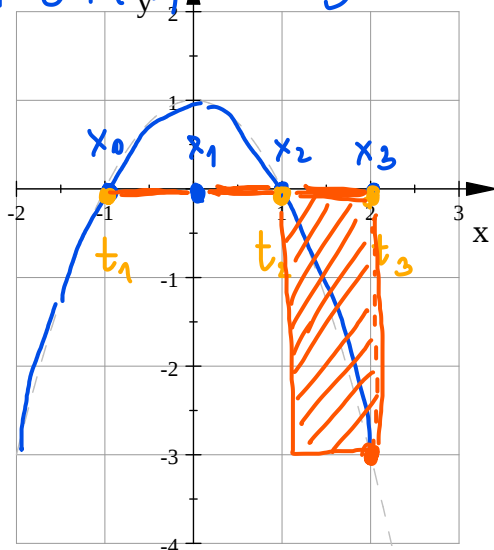
$\Delta x_i = \frac{3}{3} = 1$ Punkty podziału: $x_0 = -1$ $x_1 = 0$ $x_2 = 1$ $x_3 = 2$

Dolna suma całkowita

Punkty pośrednie:

$t_1 = -1$ $t_2 = 1$ $t_3 = 2$

$$\underline{S}_3 = 1 \cdot f(t_1) + 1 \cdot f(t_2) + 1 \cdot f(t_3) = 0 + 0 + (-3) = -3$$

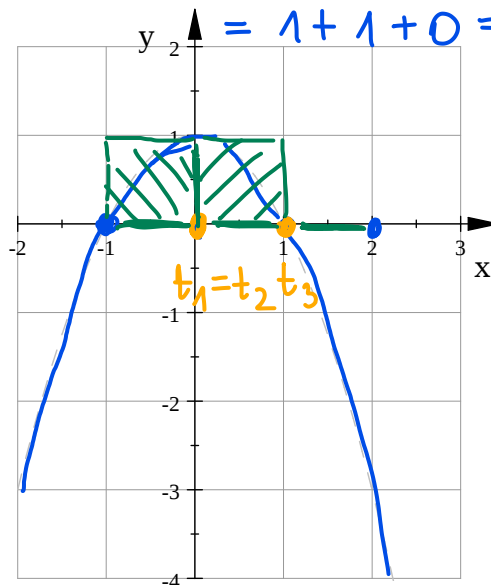


Górna suma całkowita

Punkty pośrednie:

$t_1 = 0$ $t_2 = 0$ $t_3 = 1$

$$\bar{S}_3 = 1 \cdot f(t_1) + 1 \cdot f(t_2) + 1 \cdot f(t_3) = 1 + 1 + 0 = 2$$



Zadanie 4. Napisz górną i dolną sumę całkową S_4 dla funkcji $f(x) = 2 \sin x \cos x$ i równomiernego podziału przedziału $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Podaj ich interpretację geometryczną.

$\Delta x_i = \frac{\pi}{4}$ Punkty podziału: $x_0 = -\frac{\pi}{2} \dots x_1 = -\frac{\pi}{4} \dots x_2 = 0 \dots x_3 = \frac{\pi}{4} \dots x_4 = \frac{\pi}{2}$

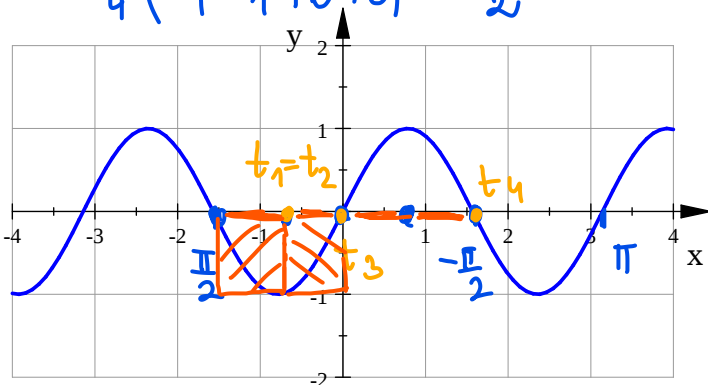
Dolna suma całkową

Punkty pośrednie:

$t_1 = -\frac{\pi}{4} \quad t_2 = -\frac{\pi}{4} \quad t_3 = 0 \quad t_4 = \frac{\pi}{2}$

$$\underline{S}_4 = \frac{\pi}{4} f(t_1) + \frac{\pi}{4} f(t_2) + \frac{\pi}{4} f(t_3) + \frac{\pi}{4} f(t_4)$$

$$= \frac{\pi}{4} (-1 - 1 + 0 + 0) = -\frac{\pi}{2}$$

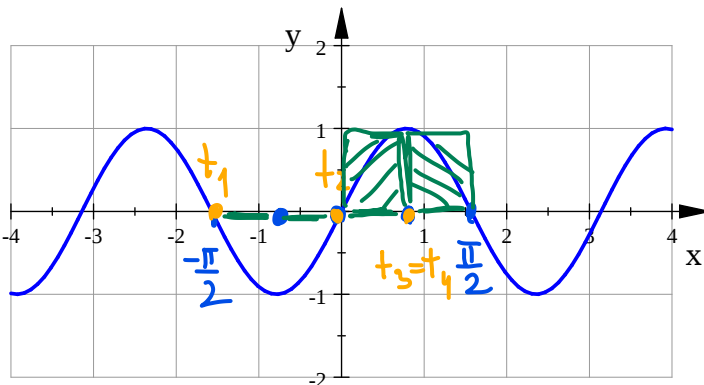


Górną sumę całkową

Punkty pośrednie:

$t_1 = -\frac{\pi}{2} \quad t_2 = 0 \quad t_3 = \frac{\pi}{4} \quad t_4 = \frac{\pi}{4}$

$$\overline{S}_4 = \frac{\pi}{4} (0 + 0 + 1 + 1) = \frac{\pi}{2}$$



→ f. rosnąca!

Zadanie 5 Napisz górną i dolną sumę całkową S_4 dla funkcji $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^3$ i równomiernego podziału przedziału $[1, 3]$. Podaj ich interpretację geometryczną.

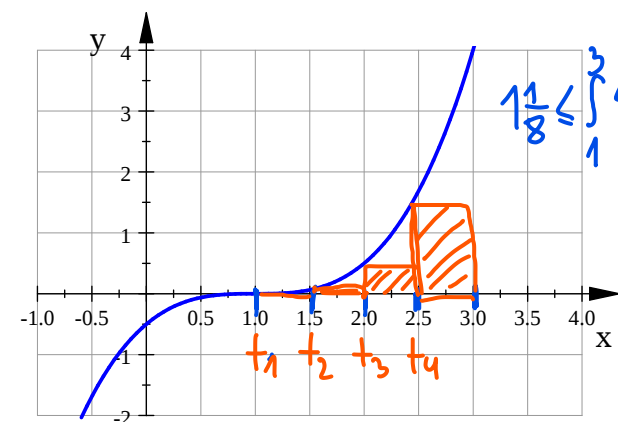
$\Delta x_i = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ Punkty podziału: $x_0 = 1 \dots x_1 = 1.5 \dots x_2 = 2 \dots x_3 = 2.5 \dots x_4 = 3$

Dolna suma całkową

Punkty pośrednie:

$t_1 = 1 \quad t_2 = 1.5 \quad t_3 = 2 \quad t_4 = 2.5$

$$\underline{S}_4 = \frac{1}{2} (f(1) + f(1.5) + f(2) + f(2.5))$$



$$\underline{S}_4 = \frac{1}{2} (0 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\frac{3}{2})^3) =$$

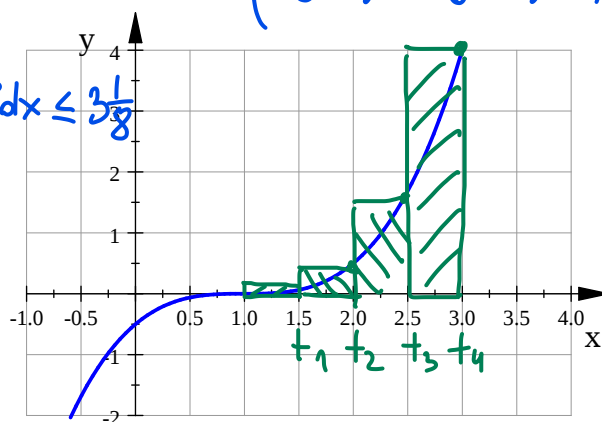
$$\frac{1}{2} (\frac{1}{16} + \frac{1}{2} + \frac{27}{16}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{36}{16} = \frac{9}{8}$$

Górną sumę całkową

Punkty pośrednie:

$t_1 = 1.5 \quad t_2 = 2 \quad t_3 = 2.5 \quad t_4 = 3$

$$\overline{S}_4 = \frac{1}{2} (\frac{1}{16} + \frac{1}{2} + \frac{27}{16} + \frac{1}{2} \cdot 8)$$



$$\overline{S}_4 = \frac{1}{2} (\frac{36}{16} + 4) = \frac{9}{8} + 2 = 3\frac{1}{8}$$