

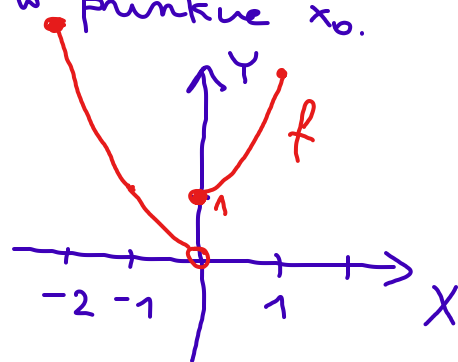
$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P) \quad | \quad \text{Tw. Jeżeli } \dots, \text{ to } \dots$$

Tw. (warunek konieczny różniczkowości)

Jeżeli $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a, b)$, to funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 .

Tw. Jeżeli $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ nie jest ciągła w punkcie $x_0 \in (a, b)$, to funkcja f nie jest różniczkowalna w punkcie x_0 .

Niech
$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{gdy } x \in [0, 1] \\ x^2, & \text{gdy } x \in [-2, 0] \end{cases}$$



(A) Funkcja f nie jest różniczkowalna w punkcie $x_0=0$, bo funkcja f nie jest ciągła w punkcie $x_0=0$.

(B) Ponieważ
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = e^0 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0 \text{ oraz}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, więc nie istnieje granica funkcji f w punkcie $x_0=0$, zatem funkcja f nie jest ciągła w punkcie $x_0=0$.

Tw. (warunek wystarczający całkowalności funkcji f)

Jeżeli $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona i ma w przedziale $[a, b]$ skończoną liczbę punktów nieciągłości I rodzaju,

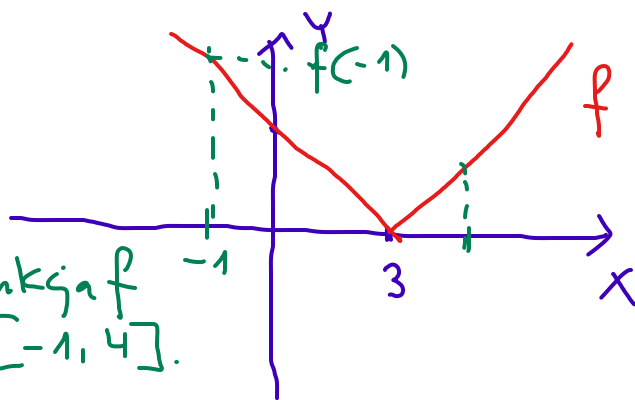
to funkcja f jest całkowna na przedziale $[a, b]$.

(C) Funkcja f jest całkowna na przedziale $[-2, 1]$, bo funkcja f jest ograniczona (tzn. $\bigwedge_{x \in [-2, 1]} 0 < f(x) \leq 4$) oraz ma jeden punkt niedogłosci I rodzaju ($x_0 = 0$)

Punkt $x_0 = 0$ jest punktem niedogłosci I rodzaju, bo funkcja f nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$ i granice jednostronne funkcji f w punkcie $x_0 = 0$ są skończone

Niech $f(x) = |3 - x|$, $x \in \mathbb{R}$.

(A) Funkcja f jest całkowna na przedziale $[-1, 4]$, bo funkcja f jest ciągła na przedziale $[-1, 4]$.



Tw. Jeżeli funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to funkcja f jest całkowna na przedziale $[a, b]$

(B) Funkcja f jest ograniczona na przedziale $[-1, 4]$, bo z rysunku: $\bigwedge_{x \in [-1, 4]} 0 \leq f(x) \leq 4$
lub $\uparrow f(-1)$

Ponieważ funkcja f jest ciągła na przedziale $[-1, 4]$, więc z Tw. Weierstrassa funkcja f jest ograniczona na przedziale $[-1, 4]$.

(C) Funkcja f nie jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 3$

$$f(x) = |3-x| = \begin{cases} 3-x, & \text{gdy } 3-x \geq 0 \\ -3+x, & \text{gdy } 3-x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3-x, & \text{gdy } x \leq 3 \\ -3+x, & \text{gdy } x > 3 \end{cases}$$

$$3-x \geq 0$$

$$3 \geq x$$

$$f(3) = 0$$

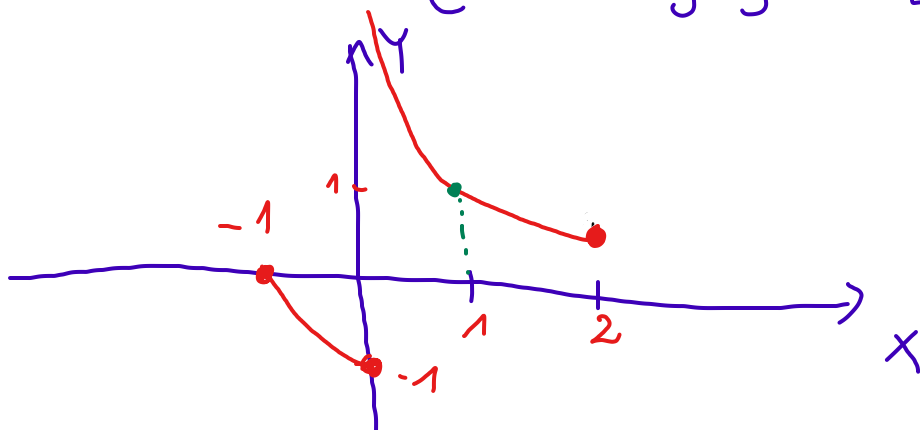
$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-3+x-0}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} 1 = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-x-0}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-(x-3)}{x-3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (-1) = -1 \end{aligned}$$

Ponieważ $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \neq \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$, więc

nie istnieje granica ilorazu różnicowego funkcji w punkcie $x_0 = 3$, a w konsekwencji funkcja f nie jest różniczkowalna w $x_0 = 3$.

Niech
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{gdy } x \in (0, 2] \\ x^2 - 1, & \text{gdy } x \in [-1, 0] \end{cases}$$



(A) Funkcja f nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$,
bo $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 1) = -1$ i

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{oraz}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ (czyli nie istnieje
granica funkcji f w punkcie $x_0 = 0$)

(B) Funkcja f nie jest różniczkowalna w punkcie
 $x_0 = 0$, bo funkcja f nie jest ciągła
w punkcie $x_0 = 0$.

(C) Funkcja f nie jest całkowalna
na przedziale $[-1, 2]$, bo funkcja f
nie jest ograniczona na przedziale $[-1, 2]$.

Tw. Jeżeli funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna,
to funkcja f jest ograniczona.

Tw. Jeżeli funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nie jest
ograniczona na przedziale $[a, b]$, to
funkcja f nie jest całkowalna na $[a, b]$.

Wyznaczyć (o ile istnieje) styczną do wykresu funkcji f w punkcie $x_0 = 1$,
gdzie $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{gdzie } x \in (0, 2] \\ x^2 - 1, & \text{gdzie } x \in [-1, 0) \end{cases}$

Dla każdego $x \in (0, 2]$, $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

STYCZNA DO WYKRESU FUNKCJI f
W PUNKCIE $(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = -\frac{1}{1} = -1$$

Odp. $y - 1 = (-1)(x - 1)$

$$\boxed{y = 2 - x}$$