

ELEMENTY PRZEBIEGU ZMIENNOŚCI FUNKCJI

20.02.2026

(1) Narysuj wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, jeśli wiadomo, że

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = 0.$$

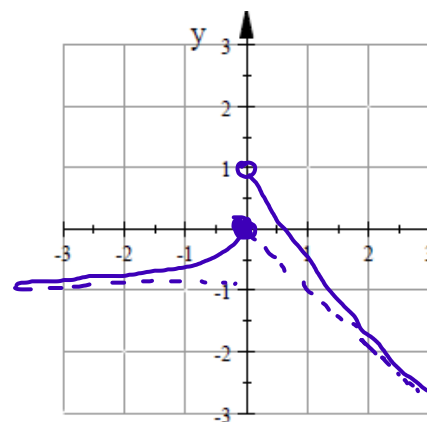
(a) Funkcja f posiada asymptoty:

$$y = -x - \text{asymptota ukośna w } +\infty$$

$$y = -1 - \text{asymptota pozioma w } -\infty$$

(b) W punkcie $x_0 = 0$ funkcja f ~~może być ciągła~~ / jest ~~ciągła~~ / ma punkt nieciągłości I rodz. / II rodz., bo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \text{ i } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \text{ i } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \text{ i granice jednostronne funkcji } f \text{ w } x_0 = 0 \text{ ss. liczbami skończonymi}$$



Def. Prosta $y = ax + b$ nazywamy asymptotą ukośną w $+\infty$ funkcji f , gdy $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \underline{\underline{(-x)}}) = 0$$

Ponieważ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$, więc $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \left\{ \frac{-1}{-\infty} \right\} = 0$

$$\text{i } b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1, \text{ zatem}$$

prosta $y = 0x - 1$ jest asymptotą poziomą funkcji f w $-\infty$.

- (2) Naskicuj wykres funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, jeśli wiadomo, że $f'(1) = 0$, $f'(x) < 0$ dla $x < 0$, $f'(x) > 0$ dla $x > 2$ oraz $f''(x) < 0$ dla $x \in (0, 2)$.

Ponieważ

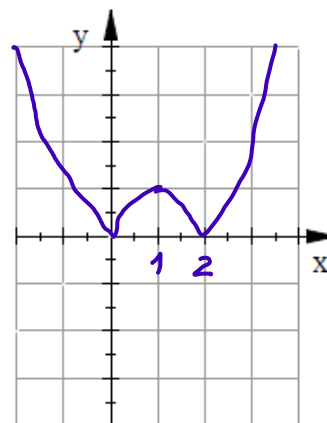
$$f'(1) = 0$$

Uzupełnij:

- (a) funkcja f jest na pewno malejąca w przedziale $(-\infty, 0)$,
bo $f'(x) < 0$ dla $x < 0$

- (b) funkcja f posiada / ~~nie posiada~~ ekstremum lokalnego
w $x_0 = 1$, bo $f'(1) = 0$ i $f''(1) < 0$

i $f''(1) < 0$,
więc funkcja f
ma w punkcie
 $x_0 = 1$ maksimum
lokalne właściwe

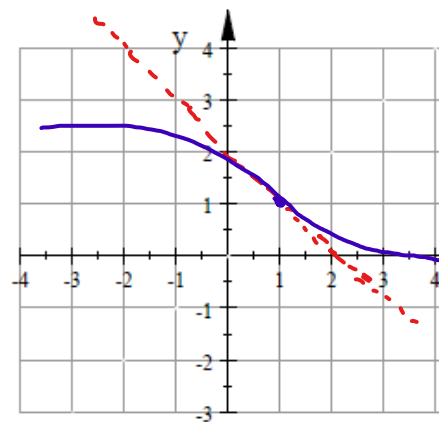


- (3) Naskicuj wykres funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, jeśli wiadomo, że $f''(x) < 0$ dla $x < 1$, $f''(x) > 0$ dla $x > 1$, $f'(x) < 0$ dla $x \in (-\infty, 2)$, $f''(1) = 0$

Uzupełnij:

- (a) f jest wklęsła w przedziale $(-\infty, 1)$,
bo $f''(x) < 0$ dla $x < 1$

- (b) f posiada / ~~nie posiada~~ / może posiadać punkt
przebiegania w $x_0 = 1$, bo $f''(1) = 0$ i
 $f''(x) < 0$ dla $x \in (-\infty, 1)$ oraz
 $f''(x) > 0$ dla $x \in (1, +\infty)$



WYZNACZYĆ PRZEDZIAŁY MONOTONICZNOŚCI I EKSTREMA LOKALNE FUNKCJI

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} \cdot x^2 - e^{2x} \cdot 2x}{x^4} = \frac{2e^{2x}(x^2 - x)}{x^4}$$

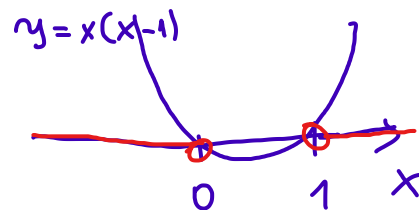
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} \cdot (x^2 - x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} 2e^{2x} > 0 \quad \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$$

$\cancel{D_f}$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2e^{2x}(x^2 - x)}{x^4} > 0 \Leftrightarrow x^2 - x > 0 \Leftrightarrow x(x-1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\bigwedge_{x \in D_f} x^4 > 0$$



$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$$

x	$-\infty$	$\begin{matrix} (-\infty, 0) \\ \downarrow \\ \dots \end{matrix}$	0	$\begin{matrix} (0, 1) \\ \downarrow \\ \dots \end{matrix}$	1	$\begin{matrix} (1, +\infty) \\ \downarrow \\ \dots \end{matrix}$	$+\infty$
$f'(x)$	.	+	X	-	0	+	.
$f(x)$	.	$\nearrow$	X	$\searrow$	e^2	$\nearrow$	.

mlm. lok. w.

$$f(1) = \frac{e^2}{1^2} = e^2$$

Funkcja f jest rosnąca w przedziałach $(-\infty, 0)$, $(1, +\infty)$,
 zaś malejąca w przedziale $(0, 1)$.
 Funkcja f ma w punkcie $x_0 = 1$ minimum lokalne właściwe
 i jest ono równe e^2 .

WYZNACZYĆ PRZEDZIAŁY WYPUKŁOŚCI, PRZEDZIAŁY
WKŁĘSTOŚCI I PUNKTY PRZEGIĘCIA WYKRESU FUNKCJI f ,
GDY

$$f(x) = x \cdot \ln^2 x$$

$$D_f = (0, +\infty)$$

$$\ln^2 x = (\ln x)^2$$

$$f'(x) = \ln^2 x + x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \ln^2 x + 2 \ln x$$

$$f''(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x} (\ln x + 1)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2(\ln x + 1)}{x} > 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1$$

$$\begin{array}{l} \swarrow \searrow \\ x \in D_f \quad \frac{2}{x} > 0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \ln x > \ln(e^{-1}) \Leftrightarrow x > e^{-1}$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < e^{-1}$$

x	0	$\downarrow$	e^{-1}	$\dots$	$+\infty$
$f''(x)$	X	-	0	+	.
$f(x)$	X	f. wkłysta	p.p.	f. wypukła	.

