

Zadania

Zadanie 1 Oblicz dolną i górną sumę całkową S_3 dla funkcji $f(x) = \sin(x)$ i równomiernego podziału przedziału $[0, \pi]$. Podaj jej interpretację geometryczną.

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{\pi}{3}$, $i = 1, 2, 3$ - długości przedziału $[x_{i-1}, x_i]$

punkty podziału: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{2\pi}{3}$, $x_3 = \pi$

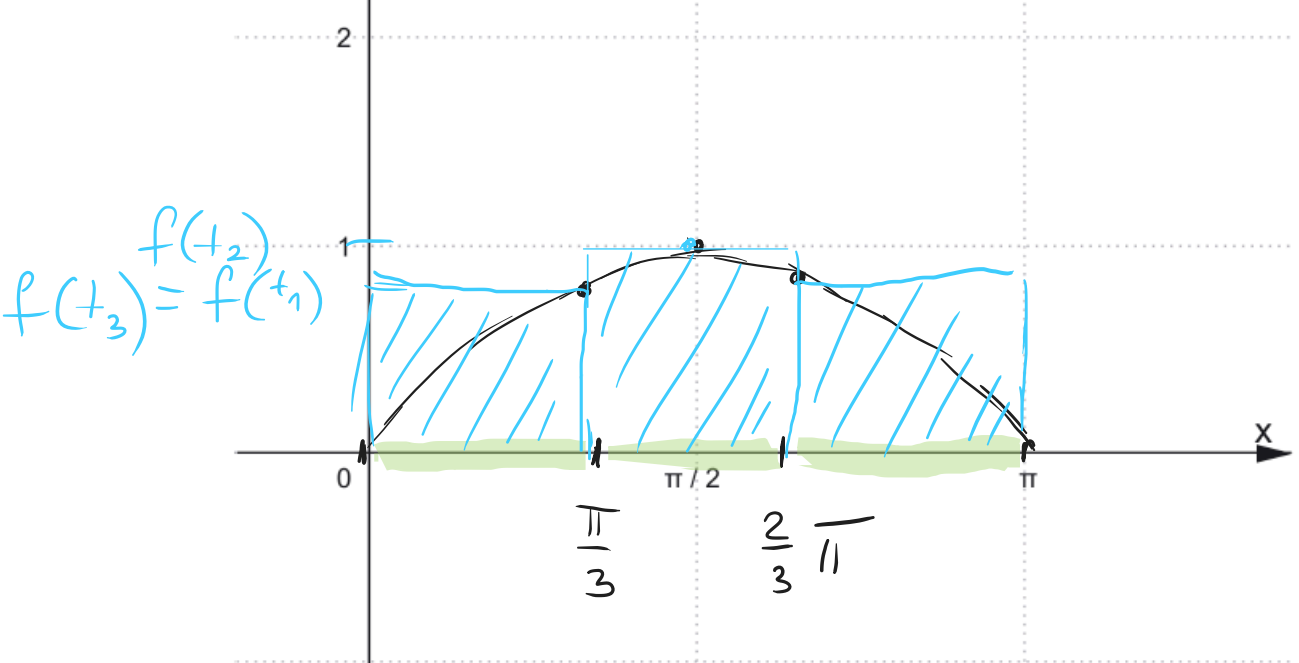
punkty pośrednie: $t_1 = \frac{\pi}{3}$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$, $t_3 = \frac{2\pi}{3}$

$S_3 = f(t_1) \cdot \Delta x_1 + f(t_2) \cdot \Delta x_2 + f(t_3) \cdot \Delta x_3$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{3} + 1 \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} (\sqrt{3} + 1)$

$f(t_1) = f(\frac{\pi}{3}) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$f(t_2) = f(\frac{\pi}{2}) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$

$f(t_3) = f(\frac{2\pi}{3}) = \sin \frac{2\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$



$\Delta x_i = \frac{\pi}{3}$

punkty podziału: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{2\pi}{3}$, $x_3 = \pi$

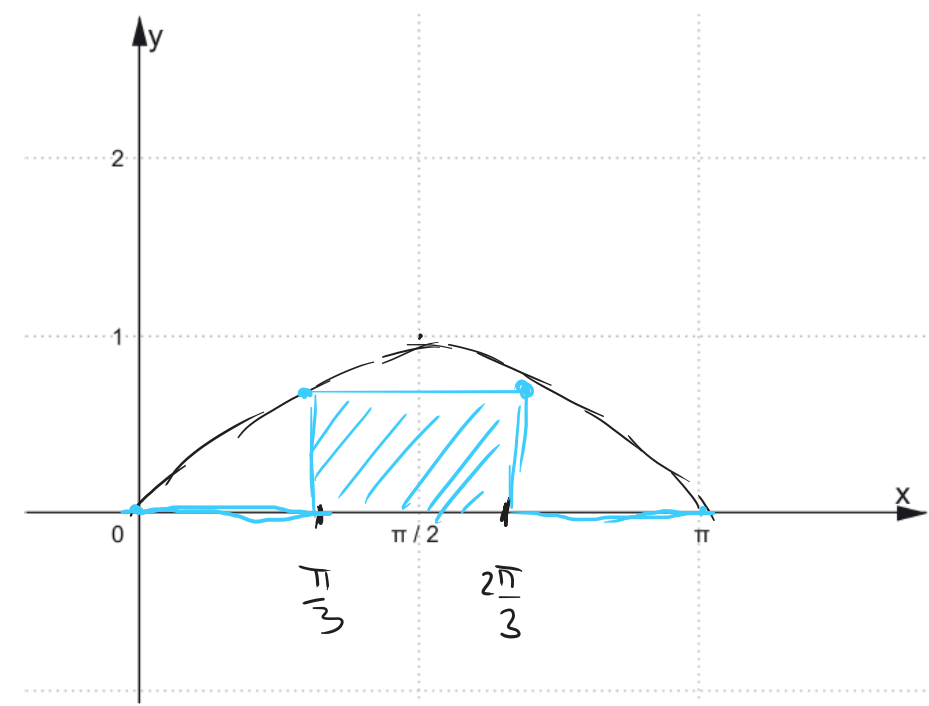
punkty pośrednie: $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{3}$, $t_3 = \frac{2\pi}{3}$

$S_3 = 0 \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{3} + 0 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6} \pi$

$f(t_1) = \sin 0 = 0$

$f(t_2) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$f(t_3) = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$



Zadanie 2 Oblicz dolną i górną sumę całkową S_3 dla funkcji $f(x) = 2^{x-1}$ i równomiernego podziału przedziału $[0, 3]$. Podaj jej interpretację geometryczną.

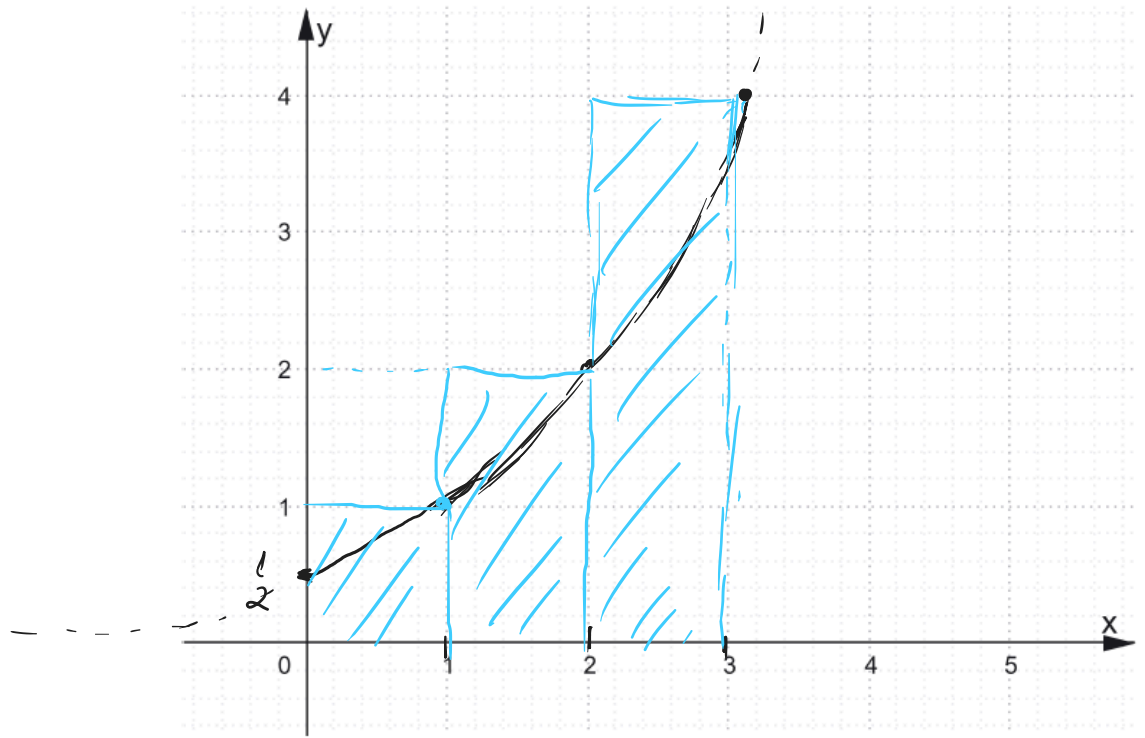
$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = 1$

punkty podziału: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$

punkty pośrednie: $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$

$f(t_1) = 1$, $f(t_2) = 2$, $f(t_3) = 4$

$S_3 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 7$



$\Delta x_i = 1$

punkty podziału:

$x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$

punkty pośrednie:

$t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = 2$

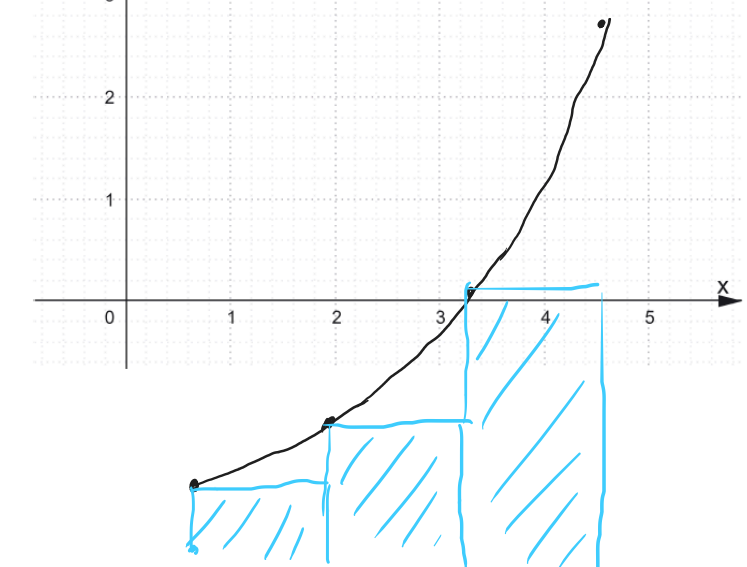
$S_3 =$

$\frac{1}{2} \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3,5$

$f(t_1) = \frac{1}{2}$

$f(t_2) = 1$

$f(t_3) = 2$



Zadanie 3 Znajdź wielomian w stopnia 3 przybliżający funkcję $f(x) = \sqrt{x+1}$ i taki, że $w(1) = f(1)$.

Zadanie 4 Znajdź wielomian w stopnia 3 przybliżający funkcję $f(x) = \ln(2x+3)$ i taki, że $w(2) = f(2)$.

roz. 4. $f(x) = \ln(2x+3)$

$f'(x) = \frac{2}{2x+3}$

$f''(x) = -\frac{2}{(2x+3)^2} \cdot 2 = -\frac{4}{(2x+3)^2}$

$f'''(x) = +\frac{4}{(2x+3)^4} \cdot 2 \cdot (2x+3) \cdot 2 = \frac{16}{(2x+3)^3}$

$f(2) = \ln 7$

$f'(2) = \frac{2}{7}$

$f''(2) = -\frac{4}{7^2}$

$f'''(2) = \frac{16}{7^3}$

$w(x) = \ln 7 + \frac{2}{7} \cdot (x-2) - \frac{2}{7^2} \cdot (x-2)^2 + \frac{8}{3 \cdot 7^3} \cdot (x-2)^3$

Wielomian Taylora

$f(x) \approx \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n$

roz. 3. $N=3$, $x_0=1$, $f(x) = \sqrt{x+1}$, $f^{(n)}$ - n-te pochodne

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$

$w(x) = \sum_{n=0}^3 \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n = \frac{f(1)}{0!} (x-1)^0 + \frac{f'(1)}{1!} (x-1)^1 + \frac{f''(1)}{2!} (x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!} (x-1)^3$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot (x+1)' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$f(1) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$f''(1) = -\frac{1}{8\sqrt{2}}$

$f'''(1) = \frac{3}{32\sqrt{2}}$

$\frac{1}{32\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{6} ()$

$f''(x) = -\frac{1}{4(x+1)} \cdot (2\sqrt{x+1})' = -\frac{1}{4(x+1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

$f'''(x) = +\frac{1}{16(x+1)^2} \cdot (4(x+1))' \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{4(x+1)} \cdot \frac{1}{x+1} \cdot (2\sqrt{x+1})' =$

$= \frac{1}{4(x+1)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{8(x+1)^2 \sqrt{x+1}} = \frac{3}{8(x+1)^2 \sqrt{x+1}}$

$w(x) = \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} (x-1) - \frac{1}{16\sqrt{2}} (x-1)^2 + \frac{1}{64\sqrt{2}} (x-1)^3$

$w(1) = \sqrt{2} = f(1)$

