$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$

DEF

A, B, C – **liniowo zależne**, gdy

$\exists_{a,b,c \in K}\ a A + b B + c C = \Theta \ \wedge \ \sim(a = b = c = 0)$

$\exists_{a,b,c \in K}\ a A + b B + c C = \Theta \ \wedge \ (a \neq 0 \vee b \neq 0 \vee c \neq 0)$

$V^n(K) = K^n$ **DEF**

A, B, C – liniowo niezależne, gdy

$\forall_{a,b,c \in K}\ (a A + b B + c C = \Theta \Rightarrow a = b = c = 0)$

$A = [\ldots, \ldots, \ldots]$ **TW**

$R_z \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} =$ liczba wektorów

$\Rightarrow A, B, C$ są liniowo niezależne

Przykład (12)

$X = [1, 2, 3]$

$Y = [-2, 0, 1]$

$Z = [0, 4, 9]$

Widać, że $Z = Y + 2X$,

to znaczy, że X, Y, Z są liniowo zależne

Inaczej $Z - Y - 2X = \Theta$, $-2 \neq 0$,

czyli Z, Y, X są liniowo zależne.

X, Y, Z

$1X + (Y) + (-1)(X+Y) =$

$= X + Y - X - Y = \Theta$

$1 \neq 0$

są liniowo zależne

TW

X, Y, Z – są liniowo zależne, gdy jeden z nich jest liniową kombinacją pozostałych.

PODPOWIEDŹ

$X, Y, \underbrace{X+Y}_{\text{to jest liniowa kombinacja wektorów } X, Y}$

$X, Y, \underbrace{2X-3Y}_{\text{l. komb. } X, Y}$

PODPOWIEDŹ

$X, Y, \underbrace{Y, \Theta}_{\text{są liniowo zależne}}$

PODPOWIEDŹ

$X, Y, Z \in V^3(\mathbb{R})$

Przecież $V^3(\mathbb{R})$ ma wymiar 2, a wektorów jest 3, to SĄ liniowo zależne.

Pokażemy, że przekształcenia nie są liniowe.

1. $T: V^2(\mathbb{R}) \to V^3(\mathbb{R})$

$T(x_1, x_2) = [x_1 - x_2, x_2, x_1 + 3]$

Zauważmy, że: $T(\underset{\in V^2(\mathbb{R})}{\Theta}) = T(\overset{\in V^2(\mathbb{R})}{(0,0)}) = [0 - 0, 0, 0 + 3] = [0, 0, 3] \neq \Theta \in V^3(\mathbb{R})$

Czyli T nie jest przekształceniem liniowym.

Tw.

Jeżeli T jest przekształceniem liniowym, to $T(\Theta) = \Theta$

Wniosek

Jeżeli $T(\Theta) \neq \Theta$, to T nie jest przekształceniem liniowym.

2. $S: V^2(\mathbb{R}) \to V^2(\mathbb{R})$

$S(x_1, x_2) = [-x_2, x_1 \cdot x_2]$

$\Theta \in V^2(\mathbb{R})$ $S(\Theta) = S(\overset{\in V^2(\mathbb{R})}{(0,0)}) = [-0, 0 \cdot 0] = [0, 0] = \Theta \in V^2(\mathbb{R})$

Z tego NIE wynika, że S jest przekształceniem liniowym.

Niech $X, Y \in V^2(\mathbb{R})$ $X = [x_1, x_2]$ $Y = [y_1, y_2]$

$S(X) + S(Y) = [-x_2, x_1 x_2] + [-y_2, y_1 y_2] = [-x_2 - y_2, x_1 x_2 + y_1 y_2]$

$S(X+Y) = S(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = [-(x_2 + y_2), (x_1 + y_1)(x_2 + y_2)] = [-x_2 - y_2, x_1 x_2 + y_1 y_2 + x_1 y_2 + y_1 x_2]$

Z tego NIE wynika, że przekształcenie S nie jest liniowe.

Wybieramy $X = [1, 1]$ $Y = [1, 2]$

$S(X) + S(Y) = S(1,1) + S(1,2) = [-1, 1 \cdot 1] + [-2, 1 \cdot 2] = [-1, 1] + [-2, 2] = [-3, 3]$

$S(X+Y) = S(2,3) = [-3, 2 \cdot 3] = [-3, 6]$

$X + Y = [1, 1] + [1, 2] = [2, 3]$

Widać, że $S(X) + S(Y) \neq S(X+Y)$.

S nie jest więc przekształceniem liniowym.

Def.

$T: V^n(K) \circlearrowleft V^m(K)$ jest przekształceniem liniowym, gdy

1. $\forall_{X, Y \in V^n(K)}\ T(X+Y) = T(X) + T(Y)$
2. $\forall_{X \in V^n(K)\ \forall a \in K}\ T(aX) = aT(X)$

$\int (f+g) = \int f + \int g$ → 1

$a = \text{const.}$ $\int af = a \int f$ → 2

$\int$ – to jest przekształcenie liniowe

Liniowa zależność

3. $X = [1, -1, 2]$ $Y = [2, 0, 1]$ $Z = [5, -1, 4]$

$R_z \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix} = 2$, bo

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \ldots = 0$, $\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

$R_z[\ldots] = 2 < 3$ = liczba wektorów

Wektory X, Y, Z są liniowo zależne.

← 4. $X = [1, 3]$ $Y = [0, -1]$ $Z = [-2, 2]$

Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $aX + bY + cZ = \Theta$

$a[1, 3] + b[0, -1] + c[-2, 2] = [0, 0]$

$\ldots$

$[a - 2c, 3a - b + 2c] = [0, 0]$

$\begin{cases} a - 2c = 0 \\ 3a - b + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2c$

$6c - b + 2c = 0$

$8c - b = 0$

$b = 8c$

„Nie wymyśliłem a, b, c równe zero"

Hipotezy $c = 1$, $b = 8$, $a = 2$

i obliczmy

$aX + bY + cZ = 2[1, 3] + 8[0, -1] + 1[-2, 2] = [2, 6] + [0, -8] + [-2, 2] =$

$= [2 + 0 - 2, 6 - 8 + 2] = [0, 0] = \Theta$ i $c = 1 \neq 0$

Zatem wektory są liniowo zależne.

1. $X = [1, 2, 3]$ $Y = [0, 1, 4]$ $Z = [5, 6, 0]$

$R_z \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} = R_z \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & -15 \end{bmatrix} =$ $w_3 + 5w_1$

$= R_z \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$, bo $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

liczba wektorów też wynosi 3, zatem są one liniowo niezależne.

2. $X = [1, 0, 2]$ $Y = [2, 1, 0]$

$R_z \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$, bo

$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

Wektory są więc liniowo niezależne.

TYLKO dla dwóch wektorów

$X \nparallel Y$, bo mają nieproporcjonalne współrzędne, czyli są liniowo niezależne

Liniowa niezależność

1. $X = [1, 2, 3]$ $Y = [0, 1, 4]$ $Z = [5, 6, 0]$

Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $aX + bY + cZ = \Theta$.

$a[1, 2, 3] + b[0, 1, 4] + c[5, 6, 0] = [0, 0, 0]$

$[a, 2a, 3a] + [0, b, 4b] + [5c, 6c, 0] = [0, 0, 0]$

$[a + 5c, 2a + b + 6c, 3a + 4b] = [0, 0, 0]$

$\begin{cases} a + 5c = 0 \\ 2a + b + 6c = 0 \\ 3a + 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -5c$

$\begin{cases} -10c + b + 6c = 0 \\ -15c + 4b = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} b - 4c = 0 \\ 4b - 15c = 0 \end{cases}$ $b = 4c$, $16c - 15c = 0$, $c = 0$ → $b = 0$ → $a = 0$

Zatem wektory X, Y, Z są liniowo niezależne.

2. $X = [1, 0, 2]$ $Y = [2, 1, 0]$

Niech $a, b \in \mathbb{R}$

i $aX + bY = \Theta$.

$a[1, 0, 2] + b[2, 1, 0] = [0, 0, 0]$

$[a, 0, 2a] + [2b, b, 0] = [0, 0, 0]$

$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ b = 0 \\ 2a = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 0$

Zatem wektory X, Y są liniowo niezależne

$p \Rightarrow q$

następnik

poprzednik