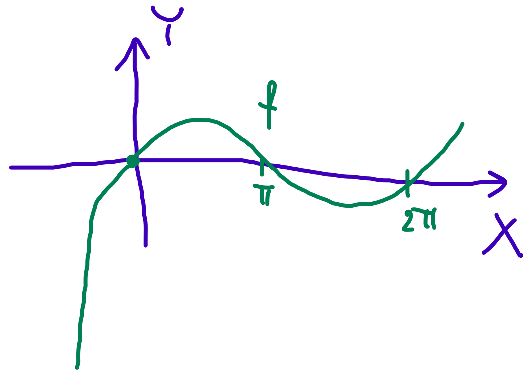
POWTÓRKA PRZED EGZAMINEM – 19.02.2026

ZADANIE 1.

Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji f w punkcie $x_0 = 0$, gdy

(A) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{gdy } x \geqslant 0 \\ x^3, & \text{gdy } x < 0 \end{cases}$



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$\underline{f(0)} = \sin 0 = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \sin x = \underline{0}$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x^3 = \underline{0}$

Ponieważ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$, więc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

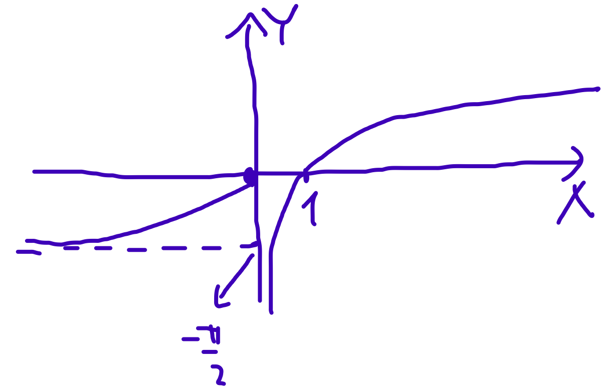
Ponieważ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$, więc funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = \underline{1}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^3 - 0}{x} = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0$$

Ponieważ $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, więc nie istnieje $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, a w konsekwencji funkcja f nie jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$.

(B) $f(x) = \begin{cases} \ln x, & \text{gdy } x > 0 \\ \operatorname{arctg} x, & \text{gdy } x \le 0 \end{cases}$



$f(0) = \operatorname{arctg} 0 = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

Ponieważ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \neq f(0)$, więc funkcja f nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 0 = 0$

Ponieważ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$, więc nie istnieje granica funkcji f w punkcie $x_0 = 0$, a w konsekwencji funkcja f nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$

p

Tw. Jeżeli „funkcja $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a,b)$", to „funkcja f jest ciągła w punkcie x_0".

q

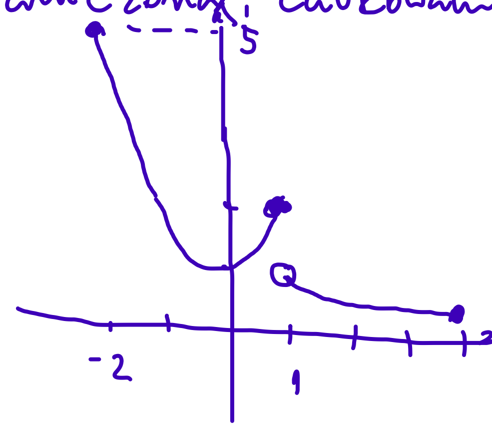
$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

Tw. Jeżeli funkcja f nie jest ciągła w punkcie $x_0 \in (a,b)$, to funkcja f nie jest różniczkowalna w punkcie x_0.

Ponieważ funkcja f nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, więc funkcja f nie jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$.

Niech $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & , \text{ gdy } x \in [-2,1] \\ e^{-x} & , \text{ gdy } x \in (1,4] \end{cases}$

Czy f jest ciągła, różniczkowalna, ograniczona, całkowalna na przedziale $[-2,4]$?



$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} e^{-x} = e^{-1}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2+1) = 1$$

Ponieważ $\lim_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim_{x \to 1^-} f(x)$, więc funkcja f nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 1$, a stąd wynika, że funkcja f nie jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 1$.

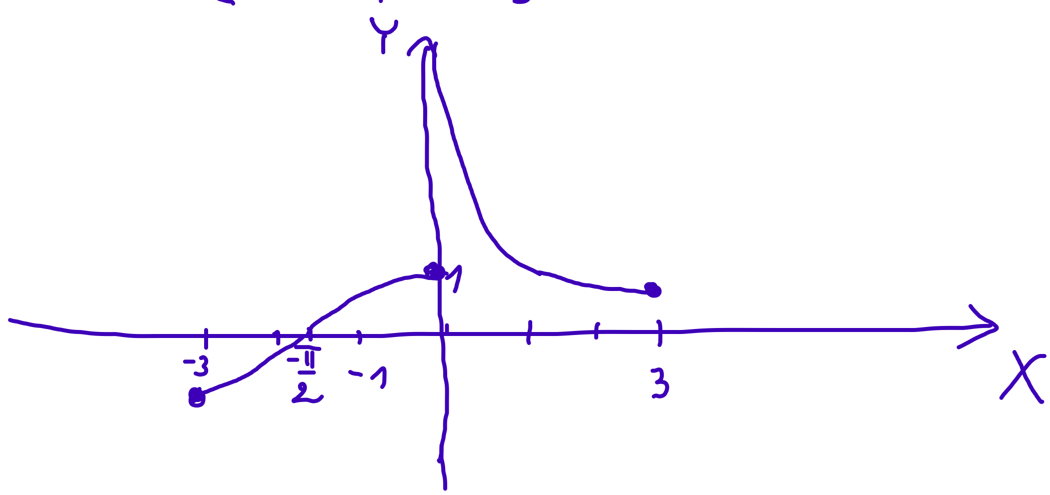
Zatem funkcja f jest ciągła w każdym punkcie zbioru $[-2,1) \cup (1,4]$.

Również funkcja f jest różniczkowalna w każdym punkcie zbioru $[-2,1) \cup (1,4]$.

Funkcja f jest ograniczona na przedziale $[-2,4]$, bo

$$\bigwedge_{x \in [-2,4]} 0 < f(x) \leqslant 5 \quad \text{(z rysunku)}$$

Niech $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{gdy } x \in [-3, 0] \\ \frac{1}{x}, & \text{gdy } x \in (0, 3] \end{cases}$



Funkcja f nie jest całkowalna na przedziale $[-3, 3]$, bo funkcja f nie jest ograniczona na przedziale $[-3, 3]$.

Tw. Jeżeli „$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna na $[a,b]$", to „funkcja f jest ograniczona na $[a,b]$."

p q

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

Tw. Jeżeli „funkcja f nie jest ograniczona na $[a, b]$", to „funkcja f nie jest całkowalna na $[a,b]$."

$\sim q$ $\sim p$

STYCZNA do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$f(2) = \frac{1}{2}$

Dla każdego $x \in (0,3]$ mamy $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$,
zatem $f'(2) = -\frac{1}{4}$.

Równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(2, f(2))$:

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x-2)$$

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{4}x + 1$$