16.11.2026 r.

Zadanie: Oblicz granicę

1) $\lim\limits_{x\to 2} (3x^2 - 4x + 1) = 3\cdot 4 - 4\cdot 2 + 1 = 12 - 8 + 1 = 5$

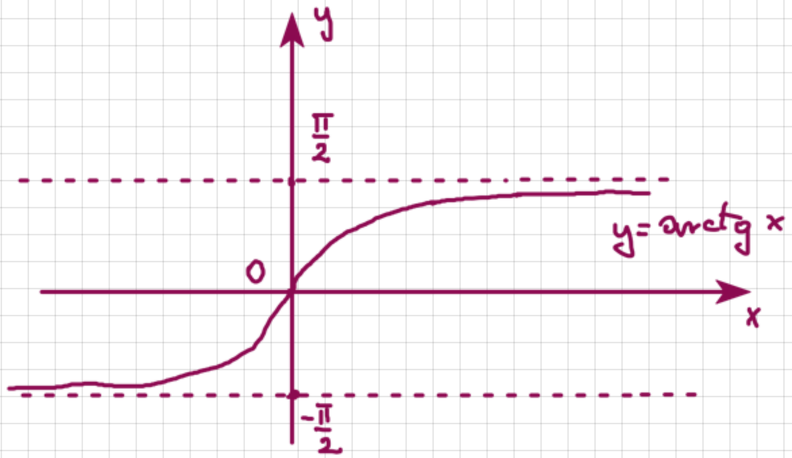
2) $\lim\limits_{x\to 1} (x^3 - 2x^2 + 6x + 1) = 1 - 2 + 6 + 1 = 6$

3) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{4x+1}{2-3x} = \dfrac{13}{-7} = -\dfrac{13}{7}$

4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln 1}{1} = \dfrac{0}{1} = 0$

5) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{e^x}{x^2} = \dfrac{e^{-2}}{(-2)^2} = \dfrac{e^{-2}}{4}$

6) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = \left[\dfrac{\operatorname{arctg}(+\infty)}{+\infty}\right] = \left[\dfrac{\frac{\pi}{2}}{+\infty}\right] = 0$



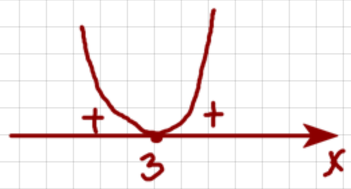
whiteboardapp.org

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^3+7x^2+3\right)=\left[+\infty+\infty\right]=+\infty$

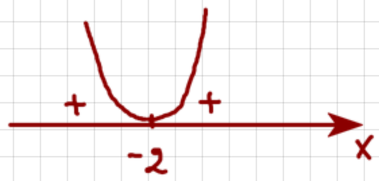
Można też tak: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^3+7x^2+3\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\left(2+\frac{7}{x}+\frac{3}{x^3}\right)=\left[+\infty\cdot 2\right]=+\infty$

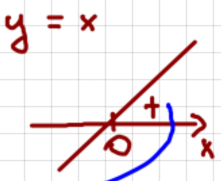
($x^3\to+\infty$, $\frac{7}{x}\to 0$, $\frac{3}{x^3}\to 0$)

8) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x-1}{(x-3)^2}=\left[\frac{5}{0^+}\right]=+\infty$

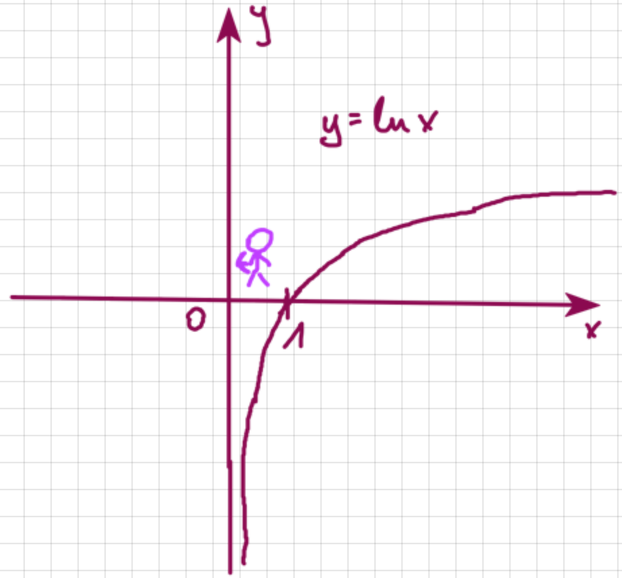


9) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x}{(x+2)^2}=\left[\frac{-2}{0^+}\right]=-\infty$



10) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}=\left[\frac{\ln 0^+}{0^+}\right]=$ { $y=x$  } $=\left[\frac{-\infty}{0^+}\right]=\left[\frac{1}{0^+}\cdot(-\infty)\right]=$

$=\left[+\infty\cdot(-\infty)\right]=-\infty$



whiteboardapp.org

Symbole nieoznaczone

$$\frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0},\ \infty-\infty,\ \infty\cdot 0,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty$$

11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-2x^2\right)=\left[+\infty-\infty\right]=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1-\frac{2}{x}\right)=\left[+\infty\cdot 1\right]=+\infty$

($x^3\to+\infty$, $\frac{2}{x}\to 0$)

12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{x^2+4x+1}=\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x_2}}=\frac{0}{1}=0$

($\frac{2}{x}\to 0$, $\frac{3}{x^2}\to 0$; $\frac{4}{x}\to 0$, $\frac{1}{x_2}\to 0$)

13) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3-2x+5x^2}{2x^2+3x+5}=\left[\frac{-\infty+\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{5x^2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}+5}{2+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{5}{2}$$

($\frac{3}{x^2}\to 0$, $\frac{2}{x}\to 0$, $\frac{3}{x}\to 0$, $\frac{5}{x^2}\to 0$)

whiteboardapp.org

14) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+2x+5}{2x^2-x+1} = \left[\dfrac{+\infty}{\infty-\infty}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{x^3}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}{2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} =$

($x \to +\infty$; $\frac{2}{x} \to 0$; $\frac{5}{x^2} \to 0$; $\frac{1}{x} \to 0$; $\frac{1}{x^2} \to 0$)

$= \left[\dfrac{+\infty}{2}\right] = +\infty$

15) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{8-x^3}{x-2} = \left[\dfrac{8-2^3}{2-2}\right] = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{(2-x)\cdot(4+2x+x^2)}{(x-2)} =$

$= \lim\limits_{x\to2} \dfrac{\cancel{(2-x)}^{1}\cdot(4+2x+x^2)}{-\cancel{(2-x)}_{1}} = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{4+2x+x^2}{-1} = \dfrac{4+4+4}{-1} = -12$

16) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{3x^2+5x-2}{4x^2+9x+2} = \left[\dfrac{12-10-2}{16-18+2}\right] = \left[\dfrac{0}{0}\right] =$

$y = 3x^2+5x-2$

$\Delta = 25+24 = 49, \quad \sqrt{\Delta} = 7$

$x_1 = \dfrac{-5-7}{6} = \dfrac{-12}{6} = -2$

$x_2 = \dfrac{-5+7}{6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

$y = 3\cdot(x+2)\cdot(x-\frac{1}{3})$

$y = 4x^2+9x+2$

$\Delta = 81-32 = 49$

$\sqrt{\Delta} = 7$

$x_1 = \dfrac{-9-7}{8} = \dfrac{-16}{8} = -2$

$x_2 = \dfrac{-9+7}{8} = \dfrac{-2}{8} = -\dfrac{1}{4}$

$y = 4(x+2)(x+\frac{1}{4})$

$= \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{3\cancel{(x+2)}^{1}(x-\frac{1}{3})}{4\cancel{(x+2)}_{1}(x+\frac{1}{4})} = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{3(x-\frac{1}{3})}{4(x+\frac{1}{4})} = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{3x-1}{4x+1} = \dfrac{-7}{-7} = 1$

whiteboardapp.org

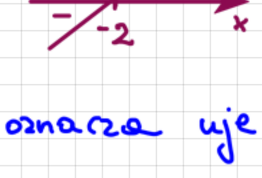
Zadanie: Wyznacz asymptoty wykresu funkcji

1) $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x+2}$

① $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Szukamy asymptot pionowych:

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{e^{-x}}{x+2} = \left[\frac{e^2}{0^-}\right] = \left\{ \begin{array}{c} y = x+2 \\ x = -2 \end{array} \right\} = -\infty$$



Ten minus oznacza, że podchodzimy do (-2) od lewej strony

Ten minus oznacza ujemne wartości po lewej stronie (-2)

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{e^{-x}}{x+2} = \left[\frac{e^2}{0^+}\right] = +\infty$$

Wobec tego prosta $x = -2$ jest asymptotą pionową obustronną.

whiteboardapp.org

(2) Szukamy asymptot poziomych

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x+2}=\left[\frac{e^{+\infty}}{+\infty}\right]=\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]\overset{H}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{(e^{-x})'}{(1x+2)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(e^{-x})\cdot(-1)}{1}=\left[e^{+\infty}\cdot(-1)\right]=$$

$$=\left[+\infty\cdot(-1)\right]=-\infty$$

Zatem wykres funkcji nie ma asymptoty poziomej przy $x\to-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{x+2}=\left[\frac{e^{-\infty}}{+\infty}\right]=\left[\frac{0}{+\infty}\right]=\left[\frac{1}{+\infty}\cdot 0\right]=0$$

Wobec tego prosta $y=0$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji przy $x\to+\infty$.

$$\left[e^{-\infty}\right]=\left[\frac{1}{e^{\infty}}\right]=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0$$

$$\left[e^{+\infty}\right]=+\infty$$

Uwaga! Asymptot ukośnych szukamy tylko przy $x\to-\infty$, bo przy $x\to+\infty$ istnieje asymptota pozioma.

whiteboardapp.org

(3) Asymptoty ukośne: szukamy ich wśród funkcji postaci:

$$y = mx + n, \text{ gdzie}$$

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad n = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - m \cdot x]$$

m i n muszą być liczbami aby asymptota ukośna istniała

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{e^{-x}}{x+2}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{x(x+2)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{x^2+2x} = \left[\frac{e^{+\infty}}{+\infty}\right] = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]^{H} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{(e^{-x})'}{(x^2+2x)'} = \lim_{x \to -\infty} \frac{(e^{-x}) \cdot (-1)}{2x+2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-e^{-x}}{2x+2} = \left[\frac{-e^{+\infty}}{-\infty}\right] = \left[\frac{-\infty}{-\infty}\right]^{H} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{(-e^{-x})'}{(2x+2)'} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-(e^{-x}) \cdot (-1)}{2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{2} = \left[\frac{e^{+\infty}}{2}\right] = \left[\frac{+\infty}{2}\right] = +\infty$$

$m = +\infty$ Oznacza to, że przy $x \to -\infty$ wykres funkcji nie ma asymptoty ukośnej.

Podsumowując: proste $x = -2$ oraz $y = 0$ są odpowiednio asymptotą pionową oraz poziomą przy $x \to +\infty$.

whiteboardapp.org