Pochodna funkcji i reguła de l'Hospitala

Def. Jeżeli istnieje granica właściwa ilorazu różnicowego $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, gdy $x \to x_0$, to granicę tę nazywamy pochodną funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy symbolem $f'(x_0)$, tzn.:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \quad x \neq x_0$$

O funkcji posiadającej pochodną w punkcie x mówimy, że jest różniczkowalna w tym punkcie.

Jeżeli funkcja f ma pochodną w każdym punkcie zbioru X, to funkcję $f: x \longmapsto f'(x)$ nazywamy funkcją pochodną (krótko: pochodną) funkcji f w zbiorze X i oznaczamy przez f'.
Mówimy wtedy, że funkcja f jest różniczkowalna w zbiorze X.

whiteboardapp.org

Tw. Jeżeli funkcje f i g określone na pewnym przedziale (a,b) posiadają pochodne w punkcie x oraz $k \in \mathbb{R}$, to funkcje $k \cdot f$, $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ oraz $\frac{f}{g}$ posiadają pochodne w punkcie x oraz prawdziwe są wzory:

1) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

2) $(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x)$

3) $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$

4) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$, $g(x) \neq 0$

whiteboardapp.org

Pochodne wybranych funkcji elementarnych

① $(a)' = 0$, $a \in \mathbb{R}$

np. $(3)' = 0$, $(-5)' = 0$, $(\pi)' = 0$, $(e)' = 0$

② $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$

③ $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$

np. $(x^3)' = 3 \cdot x^2$

$(x^5)' = 5 \cdot x^4$

$(x^6)' = 6 \cdot x^5$

$(x^{10})' = 10 \cdot x^9$

$(x)' = (x^1)' = 1 \cdot x^0 = 1$

④ $(x)' = 1$

whiteboardapp.org

⑤ $(ax+b)' = (ax)' + (b)' = a + 0 = a$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$

$(ax+b)' = a$

np. $(2x+3)' = (2x)' + (3)' = 2 + 0 = 2$

$(-5x+7)' = -5$

$(\sqrt{2} \cdot x - 3)' = \sqrt{2}$

$(\pi \cdot x + 4)' = \pi$

Przykład $\quad f(x) = 3x^2 + 7x^3 - 2x + 5$

a) $f'(x) = (3x^2 + 7x^3 - 2x + 5)' = (3x^2)' + (7x^3)' - (2x)' + (5)' = 3 \cdot (x^2)' + 7 \cdot (x^3)' - 2(x)' + 0 =$

$= 3 \cdot 2x + 7 \cdot 3 \cdot x^2 - 2 \cdot 1 = 6x + 21x^2 - 2$

b) $f(x) = 2x^6 + 7x^2 - 3x$

$f'(x) = (2x^6 + 7x^2 - 3x)' = 2 \cdot 6 \cdot x^5 + 2 \cdot 7 \cdot x^1 - 3 = 12x^5 + 14x - 3$

whiteboardapp.org

c) $f(x) = \sqrt{x}$

$$f'(x) = (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

⑥ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

d) $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -1 \cdot x^{-2} = -1 \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$

⑦ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

⑧ $(\sin x)' = \cos x$

⑨ $(\cos x)' = -\sin x$

⑩ $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

⑪ $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

whiteboardapp.org

(12) $(e^x)' = e^x$

(13) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad , a > 0 \wedge a \neq 1$

(14) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

(15) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \quad , a > 0 \wedge a \neq 1$

(16) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

(17) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

(18) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$

(19) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$

whiteboardapp.org

Zadanie Oblicz pochodną funkcji:

a) $f(x) = e^x \cdot \sin x$

$$f'(x) = (e^x \cdot \sin x)' = (e^x)' \cdot \sin x + (\sin x)' \cdot e^x = e^x \cdot \sin x + \cos x \cdot e^x = e^x(\sin x + \cos x)$$

b) $f(x) = x^2 \cdot \cos x$

$$f'(x) = (x^2 \cdot \cos x)' = (x^2)' \cdot \cos x + (\cos x)' \cdot x^2 = 2x \cdot \cos x - \sin x \cdot x^2$$

c) $f(x) = \operatorname{tg} x$

$$f'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - (\cos x)' \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

whiteboardapp.org

d) $f(x) = \frac{7}{x^2} + 5\sqrt{x}$

$$f'(x) = \left(\frac{7}{x^2} + 5\sqrt{x}\right)' = \left(7 \cdot x^{-2}\right)' + 5\left(\sqrt{x}\right)' = 7 \cdot (-2) \cdot x^{-3} + 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-14}{x^3} + \frac{5}{2\sqrt{x}}$$

e) $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-3}$

$$f'(x) = \left(\frac{2x+3}{x^2-3}\right)' = \frac{(2x+3)' \cdot (x^2-3) - (x^2-3)' \cdot (2x+3)}{(x^2-3)^2} = \frac{2 \cdot (x^2-3) - 2x \cdot (2x+3)}{(x^2-3)^2} \cdot =$$

$$= \frac{2x^2 - 6 - 4x^2 - 6x}{(x^2-3)^2} = \frac{-2x^2 - 6x - 6}{(x^2-3)^2}$$

whiteboardapp.org

Pochodna funkcji złożonej

Przykład 1) $f(x) = \cos(x^2)$

$\cos(x^2)$ — funkcja wewnętrzna

$\cos$ — funkcja zewnętrzna

$$f'(x) = \left[\cos(x^2)\right]' = \left\{\begin{array}{l} t = x^2 \\ t' = 2x \end{array}\right\} = \left[\cos t\right]' \cdot t' = (-\sin t) \cdot t' = \left(-\sin(x^2)\right) \cdot 2x$$

t' — pochodna funkcji wewnętrznej

$\left[\cos t\right]'$ — pochodna funkcji zewnętrznej

można też tak:

$$f'(x) = \left[\cos(x^2)\right]' = \left[-\sin(x^2)\right] \cdot (x^2)' = \left[-\sin(x^2)\right] \cdot 2x$$

2) $f(x) = \sin(\sqrt{x})$

$$f'(x) = \left(\sin(\sqrt{x})\right)' = \left[\cos(\sqrt{x})\right] \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

whiteboardapp.org

3) $\left(e^{3x}\right)' = \left\{ \begin{array}{l} t = 3x \\ t' = 3 \end{array} \right\} = \left(e^{t}\right)' \cdot t' = e^{t} \cdot t' = e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}$

4) $\left(e^{5x}\right)' = e^{5x} \cdot 5 = 5e^{5x}$

5) $\left(e^{\sin x}\right)' = e^{\sin x} \cdot \cos x$

6) $\left[\left(x^2 + 5x\right)^7\right]' = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 + 5x \\ t' = 2x + 5 \end{array} \right\} = \left(t^7\right)' \cdot t' = 7t^6 \cdot t' = 7 \cdot \left(x^2 + 5x\right)^6 \cdot (2x + 5)$

7) $\left[\left(x^3 + x^2\right)^8\right]' = 8 \cdot \left(x^3 + x^2\right)^7 \cdot \left(3x^2 + 2x\right)$

whiteboardapp.org

Reguła de L'Hospitala

Używana jest do obliczania granic funkcji, w przypadkach, gdy wystąpią symbole nieoznaczone: $\left[\frac{0}{0}\right]$ lub $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

np. $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{H}{=\!=} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Przykład a) $$\lim_{x\to e} \frac{x-e}{\ln x - 1} = \left[\frac{e-e}{\underbrace{\ln e}_{=1}-1}\right] = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to e} \frac{(x-e)'}{(\ln x - 1)'} = \lim_{x\to e} \frac{1}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to e} x = e$$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{e^x - e^{-x}} = \left[\frac{0}{e^0 - e^0}\right] = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(x^2+x)'}{(e^x - e^{-x})'} = \lim_{x\to 0} \frac{2x+1}{e^x - e^{-x}\cdot(-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x+1}{e^x + e^x} = \frac{2\cdot 0 + 1}{e^0 + e^0} = \frac{1}{2}$$

whiteboardapp.org

c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1-x}{\ln x + 1} = \left[\frac{1-\infty}{\ln(+\infty)+1}\right] = \left[\frac{-\infty}{+\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} (-x) = -\infty$

whiteboardapp.org